

Analyse Réelle : Suites de Nombres Réels

Opérations Élémentaires et Propriétés d'Ordre

KeepMath.com

Opérations Élémentaires sur les Suites Convergentes

Proposition : Limites et Opérations

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si (u_n) converge vers l_1 et (v_n) converge vers l_2 , alors :

1. La suite somme $(u_n + v_n)$ converge vers $l_1 + l_2$.
2. La suite produit $(u_n v_n)$ converge vers $l_1 l_2$.
3. La suite $(|u_n|)$ converge vers $|l_1|$.
4. Si $l_1 \neq 0$, alors il existe un rang N à partir duquel $u_n \neq 0$, et la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq N}$ converge vers $\frac{1}{l_1}$.

Démonstration (esquisse)

1. Somme : Soit $\epsilon > 0$. On utilise la définition de la convergence pour trouver des rangs N_1 et N_2 tels que $|u_n - l_1| < \epsilon/2$ et $|v_n - l_2| < \epsilon/2$. Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, l'inégalité triangulaire donne $|(u_n + v_n) - (l_1 + l_2)| \leq |u_n - l_1| + |v_n - l_2| < \epsilon$.

2. Produit : On utilise l'identité $|u_n v_n - l_1 l_2| = |u_n(v_n - l_2) + l_2(u_n - l_1)|$. Comme (u_n) est convergente, elle est bornée par un certain M . On peut alors majorer le terme de droite par $M|v_n - l_2| + |l_2||u_n - l_1|$, ce qui permet de conclure.

3. Valeur absolue : C'est une conséquence directe de l'inégalité $||u_n| - |l_1|| \leq |u_n - l_1|$.

4. Inverse : Si $l_1 \neq 0$, on montre d'abord qu'à partir d'un certain rang, $|u_n| > |l_1|/2$. On peut alors majorer $\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l_1}\right| = \frac{|l_1 - u_n|}{|u_n||l_1|} \leq \frac{2|l_1 - u_n|}{|l_1|^2}$, ce qui permet de conclure.

Propriétés d'Ordre des Suites Réelles Convergentes

Proposition : Passage à la Limite dans les Inégalités

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes telles que pour tout n , $u_n \leq v_n$. Alors, leurs limites respectent la même inégalité :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

2. Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et si pour tout n , $v_n \geq u_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration

Pour le point 1, on pose $w_n = v_n - u_n$. On a $w_n \geq 0$ pour tout n . Il suffit de montrer que si une suite positive converge, sa limite est positive. On raisonne par l'absurde : si la limite l de (w_n) était strictement négative, en choisissant $\epsilon = -l/2 > 0$, on pourrait trouver un rang N à partir duquel tous les termes w_n seraient dans l'intervalle $]l - \epsilon, l + \epsilon[=]3l/2, l/2[$. Tous ces termes seraient donc strictement négatifs, ce qui contredit l'hypothèse $w_n \geq 0$.

Remarque

- Si une suite (u_n) convergente est à termes positifs ($u_n \geq 0$), alors sa limite est positive ($\lim u_n \geq 0$).
- Attention, une inégalité stricte ne se conserve pas nécessairement par passage à la limite. Par exemple, la suite $u_n = \frac{1}{n+1}$ est à termes strictement positifs, mais sa limite est 0.

Théorème des Gendarmes

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n (ou à partir d'un certain rang).

1. Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite finie l , alors (v_n) converge également vers l .
2. Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) diverge également vers $+\infty$.
3. Si (w_n) diverge vers $-\infty$, alors (v_n) diverge également vers $-\infty$.

Démonstration

Pour le point 1, soit $\epsilon > 0$. Il existe des rangs N_1 et N_2 tels que pour $n \geq N_1$, $l - \epsilon \leq u_n$, et pour $n \geq N_2$, $w_n \leq l + \epsilon$. Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a donc :

$$l - \epsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \epsilon$$

Cela implique $|v_n - l| \leq \epsilon$, ce qui prouve la convergence de (v_n) vers l .

Aller plus loin & S'entraîner

Approfondissement : Pour étudier la convergence de suites sans connaître leur limite à l'avance, découvrez le critère fondamental des [Suites de Cauchy](#).

Pratique : Appliquez le théorème des gendarmes et les opérations sur les limites dans nos [Exercices corrigés : Suites de nombres réels](#).