

Analyse Réelle : Suites de Nombres Réels

Suite Majorée, Minorée, Bornée

KeepMath.com

Définition : Suite Majorée, Minorée, Bornée

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

- On dit que la suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout entier n , $u_n \leq M$.
- On dit que la suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier n , $u_n \geq m$.
- On dit que la suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée. Cela équivaut à l'existence d'un réel positif M tel que pour tout entier n , $|u_n| \leq M$.

Propriété : Convergence et Caractère Borné

Toute **suite convergente** est nécessairement bornée.

Démonstration

Soit (u_n) une suite qui converge vers une limite finie l . Appliquons la définition de la convergence avec une valeur de ϵ fixée, par exemple $\epsilon = 1$.

Il existe alors un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]l - 1, l + 1[$. Formellement, pour tout $n \geq N$, on a $|u_n - l| \leq 1$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, on peut majorer la valeur absolue de ces termes :

$$\forall n \geq N, \quad |u_n| = |u_n - l + l| \leq |u_n - l| + |l| \leq 1 + |l|$$

Les termes de la suite sont donc majorés en valeur absolue par $1 + |l|$ à partir du rang N . Les termes précédents, $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}$, forment un ensemble fini de valeurs.

On peut donc définir un majorant global M pour la suite entière en prenant le plus grand de ces nombres :

$$M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, 1 + |l|)$$

On a bien $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que la suite est bornée.

Remarque

La réciproque de cette propriété est fausse. Une suite peut être bornée sans être convergente. (Pour aller plus loin, vous pouvez consulter le cours sur les [suites monotones](#), où le théorème de convergence monotone fait le lien direct entre les suites monotones et bornées).

Exemple

La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée, car pour tout n , $|u_n| = 1 \leq 1$. Cependant, elle ne converge pas, car elle oscille indéfiniment entre les valeurs -1 et 1. (Ce type de comportement oscillatoire est souvent étudié plus en détail avec le théorème de Bolzano-Weierstrass et les [suites extraites](#)).

Entraînez-vous !

La théorie c'est bien, mais la pratique c'est mieux. Consolidez vos acquis en consultant nos

[Exercices corrigés : Suites de nombres réels.](#)