

Chapitre 1 : L'Ensemble des Nombres Réels

1 L'Ensemble des Nombres Réels

1.1 Rappels sur les ensembles ordonnés

1.1.1 Relations d'équivalence et d'ordre

Définition Une relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est dite

1. Réflexive, si pour tout $x \in E$ $x\mathcal{R}x$.
2. Symétrique, si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ implique $y\mathcal{R}x$.
3. Antisymétrique, si pour tout $(x, y) \in E^2$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ impliquent $x = y$.
4. Transitive, si pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ impliquent $x\mathcal{R}z$.
5. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 1. Dans $\mathbb{N}$ la relation, pour tout x et y , $x \leq y$ est réflexive, antisymétrique et transitive c'est une relation d'ordre. Il en est de même des relations notées de la même manière dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$.

<https://keepmath.com>

Définition Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur un ensemble E .

- On dit que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.
- Si $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre on dit que E est un ensemble ordonné.
- Si E est un ensemble ordonné tel que pour tout $(x, y) \in E^2$ on a: $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$, on dit que $(E, \mathcal{R})$ est totalement ordonné.

Exemple 2. L'ensemble $(\mathbb{N}, \leq)$, où $\leq$ est l'ordre naturel, est un ensemble totalement ordonné.

Exemple 3. La relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par: x divise y , notée x/y , qui signifie qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$: $y = kx$ est une relation d'ordre. En effet: On a: $x = 1x$ donc x/x par suite la relation $/$ est réflexive. Si x/y et y/x alors on peut trouver k et k' dans $\mathbb{N}^*$ tels que $y = kx$ et $x = k'y$. Donc $x = k'y = k'kx$ par suite $k = k' = 1$ c'est-à-dire que $x = y$. Ainsi, la relation $/$ est antisymétrique. Si x/y et y/z alors on peut trouver k et k' dans $\mathbb{N}^*$ tels que $y = kx$ et $z = k'y$ donc $z = k'y = k'kx$ avec $kk' \in \mathbb{N}^*$, donc x/z . Par suite la relation $/$ est transitive.

Remarque 1.1. $(\mathbb{N}_1, /)$ n'est pas totalement ordonné car par exemple: 2 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2.

1.2 Quelques éléments de logique

1.2.1 Implication $[A \Rightarrow B]$

La proposition A implique B, notée $[A \Rightarrow B]$ veut dire si la propriété A est vraie, alors la propriété B l'est aussi. Par contre, si la propriété A n'est pas vraie (on dit aussi, A est fausse ou encore, non A est vraie), on ne peut rien dire de la propriété B.

Exemple 4. $a = 1 \Rightarrow a^2 = 1$. Cette proposition s'exprime en disant que la propriété A implique la propriété B. la propriété A s'appelle l'hypothèse et la propriété B s'appelle la conclusion. Le raisonnement logique qui permet de passer de l'hypothèse A à la conclusion B s'appelle une démonstration. Un énoncé logiquement équivalent à la proposition $[A \Rightarrow B]$ est $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$. Lorsque l'on veut démontrer $[A \Rightarrow B]$, on peut procéder par contraposée et démontrer $[\text{non } B \Rightarrow \text{non } A]$. Une autre façon de démontrer la proposition $[A \Rightarrow B]$ est de procéder par l'absurde, c'est à dire de supposer que les propriétés A et non B sont vraies toutes les deux et d'en déduire une contradiction.

Exemple 5. La propriété de l'exemple ci-dessus s'exprime par l'absurde en $a = 1$ et $a^2 \neq 1$ est une contradiction.

1.2.2 Equivalence $[A \Leftrightarrow B]$

La proposition $[A \Leftrightarrow B]$ veut dire: si la propriété A est vraie, alors la propriété B l'est aussi, c'est à dire $[A \Rightarrow B]$ et si la propriété B est vraie, alors la propriété A l'est aussi, c'est à dire $[B \Rightarrow A]$. Les propriétés A et B sont donc vraies en même temps et fausses en même temps.

Exemple 6. Dans $\mathbb{R}$ la propriété $a^2 = 1$ n'est pas équivalente à la propriété $a = 1$. En effet, le réel $a = -1$ est tel que $a^2 = 1$ et $a \neq 1$ Donc $[a = 1 \Rightarrow a^2 = 1]$ et $[a^2 = 1 \Rightarrow a = 1]$.

1.2.3 Raisonnement par récurrence

On cherche à démontrer qu'une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier n est vraie quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Pour cela, on démontre la première propriété, en général $P(0)$ ou $P(1)$. Puis, on prouve que pour n quelconque, si les propriétés $P(0), P(1), \dots, P(n)$ sont vraies, la propriété $P(n+1)$ l'est aussi. Alors, de proche en proche à partir de la première propriété, on peut montrer que toutes les propriétés $P(n)$ sont vraies. Le schéma de démonstration est donc le suivant :

$$\begin{cases} P(0) \text{ vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(0), P(1), \dots, P(n) \text{ vraie} \Rightarrow P(n+1) \text{ vraie} \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ vraie}$$

Très souvent, la propriété $P(n)$ suffit à entraîner la propriété $P(n+1)$ Le schéma suivant, moins général mais plus fréquent, est aussi une démonstration par récurrence

$$\begin{cases} P(0) \text{ vraie} \\ \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ vraie} \Rightarrow P(n+1) \text{ vraie} \end{cases} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, P(n) \text{ vraie}$$

Exemple 7. $1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$

La propriété $P(1)$ est vraie en effet, en faisant $n = 1$ ci-dessus, on trouve $1 = 1$

Supposons donc que la propriété $P(n)$ est vraie. A partir de $P(n) : 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2$ on calcule $P(n+1) : 1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. On peut donc passer de l'ordre n à l'ordre $n+1$ On en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

1.3 L'ensemble des nombres réels

1.3.1 Introduction

Les mathématiques de base s'intéressent à certains objets appelés nombres et à des opérations sur ceux ci. La suite infinie de symboles 0, 1, 2, 3... que nous utilisons pour dénombrer est appelée l'ensemble des entiers naturels. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Quand on cherche à résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation du premier degré en la variable x, $a + x = b$. On obtient la solution lorsque $b > a$. Dans le cas où a est supérieur à b, on peut se ramener au

cas où b est nul à l'équation: $n + x = 0$.

On découvre avec "inquiétude" que cette équation n'a pas de solution dans son univers habituel d'entiers naturels. D'où la nécessité de postuler l'existence d'un nouveau nombre, qu'on note par exemple $-n$ et qui satisfait à cette équation. C'est la création de nouveaux nombres, qu'on appellera entiers négatifs. L'ensemble des entiers négatifs et des entiers naturels est appelé l'ensemble des entiers relatifs, noté $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Remarquons tout de suite qu'un entier quelconque n de $\mathbb{Z}$ étant donné, l'équation $n + x = 0$ admet toujours une solution dans $\mathbb{Z}$. On dit que $\mathbb{Z}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{N}$ pour l'équation $n + x = 0$.

Quand on cherche à résoudre sur $\mathbb{Z}$ l'équation $a + bx = 0$, a et b sont deux entiers. Si par exemple $a = 4b$ cette équation admet bien une solution dans $\mathbb{Z}$. Par contre si $b = 2a$ cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$. On décide donc de créer un nouvel objet qu'on appellera encore un nombre, et pour le distinguer d'un entier, on le qualifiera de fractionnaire ou de rationnel. Ainsi, se donner les rationnels $\frac{a}{b} = n$ et $\frac{c}{d} = m$ revient à affirmer, par définition, que: $bn - a = 0$ et $dm - c = 0$.

Compte tenu des propriétés de la multiplication dans $\mathbb{Z}$, on déduit aussitôt de cette définition des rationnels leurs propriétés habituelles. L'ensemble des fractions rationnelles noté $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n}, (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\}$.

Muni de l'addition et de la multiplication l'ensemble $\mathbb{Q}$ est un corps, qui est stable par addition, soustraction, multiplication et division. Mais constatons l'existence de nombres autres que les rationnels par l'une ou l'autre des considérations suivantes.

1. La longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 n'est pas un nombre rationnel.
2. La circonférence d'un cercle de rayon 1 qui est 2π n'est pas un rationnel.

$\sqrt{2}$, π ... sont des irrationnels.

L'ensemble des nombres rationnels et des irrationnels constituent l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Nous présumons que l'ensemble des nombres réels peut être mis en correspondance biunivoque (i.e à chaque réel correspond un et un seul point de la droite) avec tous les points d'une droite.

Avant de donner une description de la droite réelle, nous commençons par rappeler quelques éléments de logique mathématiques.

1.4 Opération sur les nombres réels

On rappelle ici les propriétés algébriques qui seront constamment utilisées dans ce cours d'analyse. Pour plus de détails consulter sur le sujet le cours d'algèbre des filières SMPCI et SMA. On désignera par $(\mathbb{R}, +, \times)$ l'ensemble des nombres réels muni des deux opérations, notées $+$ et $\times$, appelées respectivement addition et multiplication. Si $x, y \in \mathbb{R}$ on note le produit $x \times y$ par xy . Les opérations $+$ et $\times$ vérifient les propriétés suivantes :

1. L'addition est commutative: Pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ on a : $x + y = y + x$.
2. L'addition est associative: Pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ on a : $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. Il existe un élément noté 0 dans $\mathbb{R}$, appelé élément neutre pour l'addition, tel que pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a : $0 + x = x + 0 = x$.
4. Pour tout élément x dans $\mathbb{R}$, il existe un élément noté $(-x)$ dans $\mathbb{R}$, appelé opposé de x , tel que: $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
5. La multiplication est commutative: Pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ on a : $xy = yx$.
6. La multiplication est associative: Pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ on a : $x(yz) = (xy)z$.

7. Il existe un élément noté 1 dans $\mathbb{R}$, appelé élément neutre pour la multiplication, tel que pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a: $1x = x1 = x$.
8. Pour tout élément $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}$, il existe un élément noté $x^{-1} = \frac{1}{x}$ dans $\mathbb{R}$, appelé inverse de x tel que: $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.
9. La multiplication est distributive par rapport à l'addition: Pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ on a: $x(y + z) = xy + yz$.

Nous exprimons ces propriétés par :

Propriété L'ensemble $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

1.5 Ordre sur $\mathbb{R}$

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ de la relation d'ordre, notée $\leq$, qui prolonge la relation d'ordre total naturel définie sur $\mathbb{N}$. On a:

Propriété L'ensemble $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné et la relation d'ordre $\leq$ est compatible avec l'addition et la multiplication:

- Pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$, $x \leq y$ implique $x + z \leq y + z$.
- Pour tout (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, $0 \leq x$ et $0 \leq y$ impliquent $0 \leq xy$.
- Pour tout (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$ tel que $x \leq y$, alors $zx \leq zy$ si $z \geq 0$ et $zy \leq zx$ si $z \leq 0$.

Remarque 1.2. Si x et y sont deux nombres réels tels que $x < y$ alors il existe un réel z tel que $x < z < y$; il suffit de prendre $z = \frac{x+y}{2}$

Remarque 1.3. Si un réel $x \geq 0$ est tel que pour tout $\epsilon > 0$ on a: $x \leq \epsilon$, alors $x = 0$. En effet, si $x \neq 0$ on peut trouver, d'après la remarque (1.3.1), un réel ϵ' tel que $0 < \epsilon' < x$.

1.5.1 Borne supérieure-Borne inférieure

Définition Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, F une partie non vide de E et $M \in E$.

- On dit que M est un majorant de F si pour tout $x \in F$, $x \leq M$
- On dit que m est un minorant de F si pour tout $x \in F$, $x \geq m$
- L'ensemble F est dit majoré s'il admet au moins un majorant.
- L'ensemble F est dit minoré s'il admet au moins un minorant.
- On dit que F est borné s'il est majoré et minoré.
- On appelle plus grand élément de F , s'il existe, l'unique élément $q \in F$ tel que : pour tout $x \in F$ $x \leq q$.
- On appelle plus petit élément de F , s'il existe, l'unique élément $p \in F$ tel que: pour tout $x \in F$, $p \leq x$.

Exemple 8. L'ensemble $F = \{2, 3, 12\}$ est borné dans $(\mathbb{N}^*, /)$. En effet, l'ensemble F est majoré par 12 car on a : $2/12, 3/12$ et $12/12$. On a aussi F minoré par 1 car $1/2, 1/3$ et $1/12$. La partie F n'admet pas de plus petit élément dans $(\mathbb{N}^*, /)$ car 2 ne divise pas 3, par contre, 12 est le plus grand élément de F .

Remarque 1.4. Soit F une partie d'un ensemble ordonné E .

1. Si M est un majorant de F , alors tout élément de E supérieur à M , est un majorant de F .

2. Si m est un minorant de F , alors tout élément de E inférieur à m , est un minorant de F .
3. Un majorant ou un minorant de F peut être un élément de F ou non. C'est l'exemple de l'élément 1 qui est un minorant de F mais il n'appartient pas à F ; alors que 12 est un majorant de F qui appartient à F .
4. L'ensemble des majorants ou des minorants de F peut être fini ou non.

Dans l'exemple précédent l'ensemble des minorants de F est $\{1\}$, donc fini. Alors que l'ensemble de ses majorants est formé par les multiples de 12, qui est un ensemble infini.

Définition Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et F une partie non vide de E .

- On appelle borne supérieure de F , notée $\sup(F)$, le plus petit élément, s'il existe, de l'ensemble des majorants de F .
- On appelle borne inférieure de F , notée $\inf(F)$, le plus grand élément, s'il existe, de l'ensemble des minorants de F .

Exemple 9. La partie $F = \{2, 3, 12\}$ de $(\mathbb{N}^*, /)$ admet 12 pour borne supérieure et 1 pour borne inférieure. Notons que $1 \notin F$, alors que $12 \in F$

Remarque 1.5. Si F admet un plus grand (resp. plus petit) élément, alors cet élément est la borne supérieure (resp. inférieure) de F .

Avant d'aller plus loin; nous ouvrons une parenthèse pour rappeler brièvement la construction des nombres et les différents types de raisonnement mathématique. Caractérisation des bornes supérieure et inférieure

Propriété Toute partie A non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et on a:

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, & a \leq M \\ \forall \epsilon > 0, & \exists a \in A : M - \epsilon < a \leq M \end{cases}$$

Toute partie A non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure et on a:

$$m = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall x \in A, & m \leq x \\ \forall \epsilon > 0, & \exists x_0 \in A : m \leq x_0 < m + \epsilon \end{cases}$$

Théorème L'ensemble, $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$, des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$ ce qui signifie qu'entre deux réels x et y distincts il existe une infinité de nombres rationnels.

Archimède Pour tout nombre réel x , il existe un entier naturel n tel que : $x < n$.

Preuve Raisonnons par absurde: Supposons le contraire c'est-à-dire qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq n$ pour tout entier naturel n , donc $\mathbb{N}$ est majoré dans $\mathbb{R}$ par suite $\mathbb{N}$ admet une borne supérieure.

Soit $M = \sup(\mathbb{N})$ donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M - \epsilon < n$ car $M - \epsilon$ n'est pas un majorant. Or, si on prend $\epsilon = 1$, on aura $M < n + 1$ ce qui est absurde car $n + 1 \in \mathbb{N}$ et M est un majorant de $\mathbb{N}$.

Définition On appelle valeur absolue d'un nombre réel x , le réel positif, notée $|x|$, défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Propriété La valeur absolue vérifie les propriétés suivantes :

1. $|-x| = |x|$.
2. $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$
3. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, $|xy| = |x||y|$.

4. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

5. Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Remarque 1.6. Si $a \geq 0$ l'inégalité $|x| \leq a$ signifie que $-a \leq x \leq a$.

Formule du binôme

Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \mathcal{C}_n^p a^p b^{n-p},$$

où

$$\mathcal{C}_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n. \quad \text{et } 0! = 1$$

Rappelons ici la notion d'intervalle et de voisinage de la droite réelle :

Définition Soient a et b deux nombres réels distincts ($a < b$).

- On appelle intervalle fermé, d'origine a et d'extrémité b , l'ensemble $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$.
- On appelle intervalle ouvert d'origine a et d'extrémité b , l'ensemble $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$.
- On appelle voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, toute partie, notée $\mathcal{V}(x_0)$ de $\mathbb{R}$ qui contient un intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $x_0 \in]a, b[$.
- On appelle voisinage de $+\infty$ tout intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$.
- On appelle voisinage de $-\infty$ tout intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$.

Remarque 1.7. Soient $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathcal{V}$. Alors $\mathcal{V}$ est un voisinage de x_0 si et seulement si il existe $h > 0$ tel que $]x_0 - h, x_0 + h[\subset \mathcal{V}$. Dans la suite on appellera voisinage de x_0 tout intervalle ouvert de la forme $]x_0 - h, x_0 + h[; h > 0$.

Découvrez la suite du cours et des exercices interactifs sur **KeepMath.com**