

Équations Différentielles Linéaires

1 Introduction - Définitions générales

Définition 1.1 (Équation différentielle). Une **équation différentielle** (ED) d'ordre n est une équation faisant intervenir une fonction y ainsi que ses dérivées $y^{(k)}$ jusqu'à l'ordre n .

L'équation différentielle d'ordre n la plus générale peut toujours s'écrire sous la forme :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Définition 1.2 (Solution). Une **solution** d'une équation différentielle sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y \in C^n(I; \mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in I$, on ait :

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Exemple. – $y(t) = Ce^{2t}$ est une solution de l'équation $y'(t) = 2y(t)$ sur $\mathbb{R}$, pour tout $C \in \mathbb{R}$ fixé.

– $y(x) = mx^2 - 5x$ est une solution de $y'' = 2m$ sur $\mathbb{R}$.

– $y'' + y = 0$, $y = \sin x$ est solution car $y' = \cos x$ et $y'' = -\sin x$.

Remarque. On dit aussi "intégrer l'ED" au lieu de "trouver une solution de l'ED".

2 Équation différentielle du premier ordre

Définition 2.1. Une équation différentielle est du **premier ordre** si elle ne fait intervenir que la première dérivée y' .

2.1 Équation différentielle à variables séparées

Définition 2.2 (Variables séparées). Une équation différentielle du premier ordre est dite à **variables séparées** si elle peut s'écrire sous la forme :

$$f(y) \cdot y' = g(x) \quad (VS)$$

Proposition 2.1 (Résolution). Une équation à variables séparées s'intègre facilement :

$$f(y) dy = g(x) dx \iff \int f(y) dy = \int g(x) dx + C.$$

Il s'agit donc de trouver des primitives F et G de f et g , et ensuite d'exprimer y en fonction de x et C :

$$F(y) = G(x) + C \iff y = F^{-1}(G(x) + C).$$

Exemple. Résoudre sur $I =]1, +\infty[$ l'équation différentielle :

$$xy' \ln x = (3 \ln x + 1)y.$$

On sépare les variables en divisant par $yx \ln x$ (ce qui est permis si $y \neq 0$) :

$$\frac{y'}{y} = \frac{3 \ln x + 1}{x \ln x} \iff \int \frac{1}{y} dy = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x \ln x} \right) dx + C.$$

Soit :

$$\ln |y| = 3 \ln |x| + \ln |\ln x| + K = \ln |x^3 \ln x| + K.$$

En prenant l'exponentielle :

$$y = C_2 x^3 \ln x, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

($C_2 = 0 \Rightarrow y = 0$ est aussi solution).

Exemple. Résoudre : $2xy \, dy = (x^2 - y^2) \, dx$.

Posons $y = vx$. On a $dy = v \, dx + x \, dv$.

L'équation devient :

$$\frac{2v}{1-3v^2} \, dv = \frac{dx}{x}.$$

Après intégration :

$$x^3(1-3v^2) = K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

D'où :

$$x(x^2 - 3y^2) = K \iff y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{x^2 - \frac{K}{x}}.$$

2.2 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 2.3 (EDL du premier ordre). Une équation différentielle **linéaire** (EDL) du premier ordre est une équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (E)$$

où a , b et c sont des fonctions continues sur un même intervalle $I \subset \mathbb{R}$, avec $\forall x \in I : a(x) \neq 0$.

Définition 2.4 (Équation homogène associée). On appelle **équation homogène** (ou équation sans second membre) associée à (E) , l'équation :

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (E_0).$$

Remarque. Si le coefficient de y' vaut 1, on dit que l'équation est **normalisée** ou **résolue en y'** .

Proposition 2.2 (Résolution de l'équation homogène). (E_0) est une équation à variables séparées. En l'écrivant :

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)},$$

et en l'intégrant, on obtient :

$$\ln |y| = \int -\frac{b(x)}{a(x)} \, dx + C.$$

Avec $K \in \{\pm e^C, 0\}$, on a :

$$y = Ke^{F(x)}, \quad K \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)} \, dx.$$

Proposition 2.3. L'ensemble des solutions de (E) est obtenu en ajoutant à toutes les solutions de (E_0) une solution particulière de (E) .

Proposition 2.4 (Variation de la constante). On cherche la solution particulière sous la forme $y = K(x)e^{F(x)}$, avec K une fonction à déterminer.

On trouve que y est solution si et seulement si :

$$K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)} e^{-F(x)} \iff K(x) = \int \frac{c(x)}{a(x)} e^{-F(x)} \, dx.$$

La solution générale est donc :

$$y(x) = e^{F(x)} \left(K + \int \frac{c(x)}{a(x)} e^{-F(x)} \, dx \right), \quad K \in \mathbb{R},$$

où $F(x) = \int -\frac{b(x)}{a(x)} \, dx$.

Exemple. Résoudre sur $I =]0, \pi/2[$ l'équation différentielle :

$$\sin x y' - \cos x y = x.$$

Résolvons d'abord l'équation homogène :

$$\sin x y' - \cos x y = 0 \iff \frac{y'}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

On obtient :

$$\ln |y| = \ln |\sin x| + k \implies y = K \sin x, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière sous la forme $y = K(x) \sin x$.

On a $y'(x) = K'(x) \sin x + K(x) \cos x$, ce qui donne :

$$K'(x) \sin^2 x = x \iff K'(x) = \frac{x}{\sin^2 x}.$$

On intègre par parties :

$$K(x) = \int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -\frac{x}{\tan x} + \ln |\sin x|.$$

La solution générale est donc :

$$y = -x \cos x + (K + \sin x \ln \sin x), \quad K \in \mathbb{R}.$$

2.3 Équations non linéaires se ramenant à des EDL

Définition 2.5 (Équation de Bernoulli). Une équation différentielle est dite de **Bernoulli** si elle est de la forme :

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R} \quad (\text{Ber})$$

Proposition 2.5 (Résolution de Bernoulli). Pour résoudre l'équation de Bernoulli, on pose $u = y^{1-n}$. Cette substitution transforme l'équation en une équation différentielle linéaire en la nouvelle variable u .

Définition 2.6 (Équation de Ricatti). Les équations de **Ricatti** sont des équations différentielles de la forme :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \quad (\text{Ric})$$

Proposition 2.6 (Résolution de Ricatti). Si y_1 est une solution particulière, on pose le changement de fonction suivant :

$$y = y_1 + \frac{1}{z}.$$

Cette substitution transforme l'équation en une équation linéaire en z .

Définition 2.7 (Équation de Lagrange). Les équations de **Lagrange** sont des équations différentielles de la forme :

$$y = xf(y') + g(y') \quad (\text{Lag})$$

Proposition 2.7 (Résolution de Lagrange). Pour intégrer les équations de Lagrange, on pose

$$y' = p = \frac{dy}{dx}.$$

(Lag) devient : $y = xf(p) + g(p)$, et on différencie :

$$dy = f(p) dx + xf'(p) dp + g'(p) dp.$$

$$p dx = f(p) dx + x f'(p) dp + g'(p) dp.$$

$$(p - f(p)) dx = [x f'(p) + g'(p)] dp.$$

On transforme (Lag) en une équation différentielle linéaire en $\frac{dx}{dp} = x'$.

Proposition 2.8. Pour résoudre une équation de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, on pose $y = tx$.

3 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Définition 3.1. Une équation différentielle du **second ordre à coefficients constants** est une équation différentielle de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, et f une fonction continue sur I ouvert de $\mathbb{R}$.

L'équation homogène (ou sans second membre) associée est :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (E.H)$$

3.1 Résolution de l'équation homogène associée

On cherche la solution sous la forme $y = e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$. On a alors $y' = ry$ et $y'' = r^2y$, donc (E) devient :

$$y \cdot (ar^2 + br + c) = 0.$$

Proposition 3.1 (Équation caractéristique). L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée **équation caractéristique**.

Suivant le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, on a les résultats suivants :

1) **Si $\Delta > 0$** : L'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$, et

$$y_1(x) = e^{r_1x}, \quad y_2(x) = e^{r_2x}$$

est une base de $S_2(I)$.

La solution générale est :

$$y(x) = Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

2) **Si $\Delta = 0$** : L'équation caractéristique admet une racine réelle double r , et

$$y_1(x) = e^{rx}, \quad y_2(x) = xe^{rx}$$

est une base de $S_2(I)$.

La solution générale est :

$$y(x) = (A + Bx)e^{rx}, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

- 3) Si $\Delta < 0$: L'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$), et

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

est une base de $S_2(I)$.

La solution générale est :

$$y(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Démonstration.

Il est clair que dans chaque cas $y_1(x)$, $y_2(x)$ sont solutions de $(E.H)$.

Pour vérifier qu'ils sont indépendants, il suffit de vérifier que leur wronskien est non nul.

Par exemple dans le cas où $\Delta > 0$, le wronskien de $y_1(x)$, $y_2(x)$ est :

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2)x} \neq 0.$$

□

3.2 Recherche d'une solution particulière

Proposition 3.2 (Cas $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$). Si le second membre est de la forme $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P(x) \in \mathbb{R}[X]$, on cherche la solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = e^{\alpha x} x^s Q(x),$$

où Q est un polynôme du même degré que P , et l'entier s est choisi de la façon suivante :

- $s = 0$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique.
- $s = 1$ si α est l'une des racines de l'équation caractéristique.
- $s = 2$ si α est racine double de l'équation caractéristique.

Les coefficients du polynôme Q sont déterminés par identification.

Remarque. Cette méthode s'applique notamment pour $\alpha = 0$, c'est-à-dire lorsque $f(x) = P(x)$.

Proposition 3.3 (Cas $f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos(\omega x)$). Si le second membre est de la forme $f(x) = P(x)e^{\alpha x} \cos(\omega x)$, où $\omega, \alpha \in \mathbb{R}$, P est un polynôme réel de degré n , on cherche la solution particulière sous la forme :

$$y_p(x) = e^{\alpha x} x^s \{Q(x) \cos(\omega x) + R(x) \sin(\omega x)\},$$

où Q et R sont deux polynômes ayant le même degré que P , et l'entier s est choisi de la façon suivante :

- $s = 0$ si $\alpha + i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.
- $s = 1$ si $\alpha + i\omega$ est une racine de l'équation caractéristique.

Les polynômes Q et R sont déterminés par identification.

Proposition 3.4 (Méthode de variation des constantes). Si $\{y_1, y_2\}$ est une base de solutions de l'équation homogène, on cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_0 = \lambda y_1 + \mu y_2,$$

où λ et μ sont deux fonctions vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0, \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' = \frac{f(x)}{a}. \end{cases}$$

Exemple. Résoudre sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[:$

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}.$$

Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont $\lambda \cos x + \mu \sin x$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière sous la forme :

$$y_0(x) = \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x.$$

Les fonctions $\lambda(x)$, $\mu(x)$ vérifient :

$$\begin{cases} \lambda' \cos x + \mu' \sin x = 0, \\ -\lambda' \sin x + \mu' \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

On obtient $\mu' = 1$, donc $\mu(x) = x$.

Et $\lambda' = -\frac{\sin x}{\cos x}$, donc $\lambda(x) = \ln(\cos x)$.

La solution générale est donc :

$$y = A \cos x + B \sin x + \ln(\cos x) \cos x + x \sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Proposition 3.5 (Principe de superposition). Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, une solution particulière est donnée par $y = y_1 + y_2$, où y_i est une solution de $ay'' + by' + cy = f_i(x)$ (pour $i = 1, 2$).

Exemple. Résoudre $y'' + y = x + \cos 3x$ sur $I = \mathbb{R}$.

1) **Équation homogène** : L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$.

La solution générale de (E.H) est $y = A \cos x + B \sin x$.

2) **Solution particulière pour $y'' + y = x$** : $y_1 = x$.

3) **Solution particulière pour $y'' + y = \cos 3x$** :

En remplaçant $y = A \cos 3x + B \sin 3x$ dans l'équation, on trouve :

$$(A - 9A) \cos 3x + (B - 9B) \sin 3x = \cos 3x.$$

Donc $A = -\frac{1}{8}$ et $B = 0$.

4) **Conclusion** : La solution générale est :

$$y = x - \frac{1}{8} \cos 3x + A \cos x + B \sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$