

Chapitre 2 : Suites Numériques

1 Suites Numériques

1.1 Suites numériques

Définition 1.1. Une suite numérique est une application u définie d'une partie I de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$:

$$u : I \longrightarrow \mathbb{R} \quad n \longmapsto u(n) = u_n.$$

Le nombre réel $u(n) = u_n$ s'appelle le terme général de la suite. La suite définie par l'application u est notée $(u_n)_{n \in I}$ ou tout simplement (u_n) si $I = \mathbb{N}$. L'ensemble $\{u(n) : n \in I\}$ est appelé ensemble des valeurs de la suite.

Exemple 1.1. $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Exemple 1.2. $u_n = (-1)^n, n \geq 1$.

Définition 1.2. On dit que la suite (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : n \geq N_0 \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon,$$

on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ ou $u_n \rightarrow l$. Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Exemple 1.3. La suite $(\frac{1}{n+1})$ converge vers 0. En effet, soit $\epsilon > 0$, appliquons le théorème d'Archimède pour $\frac{1}{\epsilon}$, il existe alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{\epsilon} < N_0$, il suffit donc de prendre $N_0 = E(\frac{1}{\epsilon}) + 1$. Rappelons que $E(x)$ représente la partie entière de x ; c'est le plus grand entier tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Définition 1.3 (Divergence vers $\pm\infty$). On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$: une suite réelle, diverge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), si $\forall A > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_0, u_n > A$ (resp. $u_n < -A$).

Propriété 1.1. Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Démonstration. On procède par l'absurde. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente ayant deux limites $l \neq l'$. Choisissons $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \frac{|l-l'|}{2}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ il existe N_1 tel que $n \geq N_1$ implique $|u_n - l| < \epsilon$. De même $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l'$, il existe N_2 tel que $n \geq N_2$ implique $|u_n - l'| < \epsilon$. Notons $N = \max(N_1, N_2)$, on a alors pour ce N : $|u_N - l| < \epsilon$ et $|u_N - l'| < \epsilon$. Donc $|l - l'| = |l - u_N + u_N - l'| \leq |l - u_N| + |u_N - l'|$ d'après l'inégalité triangulaire. On en tire $|l - l'| \leq \epsilon + \epsilon = 2\epsilon < |l - l'|$. On vient d'aboutir à l'inégalité $|l - l'| < |l - l'|$ qui est impossible. Bilan: notre hypothèse de départ est fausse et donc $l = l'$. $\square$

1.1.1 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 1.4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire : $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Propriété 1.2. Toute suite convergente est bornée.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers le réel l . En appliquant la définition de limite avec $\epsilon = 1$, on obtient qu'il existe un entier naturel N tel que pour $n \geq N$ on ait $|u_n - l| \leq 1$ et donc pour $n \geq N$ on a

$$|u_n| = |l + (u_n - l)| \leq |l| + |u_n - l| \leq |l| + 1.$$

Donc si on pose $M = \max(|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |l| + 1)$ on a alors $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. $\square$

Remarque 1.1. La réciproque est fausse.

Exemple 1.4. La suite $(-1)^n, n \geq 1$, est bornée mais n'est pas convergente.

1.1.2 Suites monotones

Définition 1.5. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Théorème 1.1. Toute suite croissante et majorée est convergente. Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Remarque 1.2. Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$. Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

<https://keepmath.com>

Démonstration. Notons $A = \{u_n | n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, disons par le réel M , l'ensemble A est majoré par M , et de plus il est non vide, donc il admet une borne supérieure notons $l = \sup A$. Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$. Soit $\epsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure, il existe un élément u_{N_0} de A tel que $l - \epsilon < u_{N_0} \leq l$. Mais alors pour $n \geq N_0$ on a $l - \epsilon < u_{N_0} \leq u_n \leq l$ et donc $|u_n - l| \leq \epsilon$. $\square$

1.1.3 Opération élémentaires sur les suites convergentes

Propriété 1.3. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles. Si (u_n) converge vers l_1 et (v_n) converge vers l_2 . Alors :

1. La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l_1 + l_2$.
2. La suite produit $(u_n v_n)$ converge vers $l_1 l_2$.
3. La suite $(|u_n|)$ converge vers $|l_1|$.
4. Si $l_1 \neq 0$, alors il existe un entier N tel que $u_n \neq 0$ pour $n \geq N$, la suite $(\frac{1}{u_n})_{n \geq N}$ converge vers $\frac{1}{l_1}$.

Démonstration. 1. Montrons que la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l_1 + l_2$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1$ implique pour $\frac{\epsilon}{2} > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N_1$ on a $|u_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l_2$ implique pour $\frac{\epsilon}{2} > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N_2$ on a $|v_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2}$ donc $\forall \epsilon > 0, \exists N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N$ on a $|u_n + v_n - (l_1 + l_2)| \leq |u_n - l_1| + |v_n - l_2| < \epsilon$. Ce qui prouve le résultat.

2. Montrons que la suite produit $(u_n v_n)$ converge vers $l_1 l_2$. On distingue deux cas: 1er cas si $l_2 \neq 0$ ou $(l_1 \neq 0)$ La suite (u_n) est convergente donc elle est bornée c.à.d $\exists M > 0$ tq. $|u_n| < M \forall n \in \mathbb{N}$. D'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l_1$ implique pour $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2|l_2|} > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ tels que pour

$n \geq N_1$ on a $|u_n - l_1| < \frac{\epsilon}{2|l_2|}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l_2$ implique pour $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2M} > 0$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N_2$ on a $|v_n - l_2| < \frac{\epsilon}{2M}$ donc pour $\epsilon > 0$, $\exists N = \max(N_1, N_2) \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N$ on a $|u_n v_n - l_1 l_2| = |u_n v_n - u_n l_2 + u_n l_2 - l_1 l_2| \leq |u_n| |v_n - l_2| + |l_2| |u_n - l_1| < \epsilon$ ce qui montre que $(u_n v_n)$ converge vers $l_1 l_2$.

2^{ème} cas si $l_1 = l_2 = 0$ La suite (u_n) est convergente donc elle est bornée c.à.d $\exists M > 0$ tq. $|u_n| < M \forall n \in \mathbb{N}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l_2$ implique pour $\epsilon' = \frac{\epsilon}{M} > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq N$ on a $|v_n - l_2| < \frac{\epsilon}{M}$ donc $|u_n v_n - 0| \leq |u_n| |v_n| < \epsilon$.

3. Montrons que la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l_1|$ on a $||u_n| - |l_1|| \leq |u_n - l_1|$ donc $||u_n| - |l_1|| < \epsilon$ si $|u_n - l_1| < \epsilon$.

4. Enfin, si (u_n) converge vers $l_1 \neq 0$, on prend $\epsilon = \frac{|l_1|}{2}$. Il existe alors un entier N tel que $|u_n - l_1| < \frac{|l_1|}{2}$ pour $n \geq N$ donc $l_1 - \frac{|l_1|}{2} \leq u_n \leq l_1 + \frac{|l_1|}{2}$, en particulier si $n \geq N$ on obtient $u_n > \frac{l_1}{2} > 0$ si $l_1 > 0$ et $u_n < \frac{l_1}{2} < 0$ si $l_1 < 0$. par suite pour $n \geq N$, les termes de la suite sont non nuls. Plus précisément on a montré que $|u_n| > \frac{|l_1|}{2}$, donc ils sont de même signe que l_1 . On peut alors définir, pour $n \geq N$ la suite $(\frac{1}{u_n})$. Montrons que cette suite converge vers $\frac{1}{l_1}$. On a $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l_1}| = \frac{|u_n - l_1|}{|u_n l_1|}$ Pour $\epsilon' = \frac{|l_1|^2 \epsilon}{2} > 0$ il existe N' tel que $n \geq N'$ implique $|u_n - l_1| < \epsilon'$. De plus, $|u_n| > \frac{|l_1|}{2}$ si $n \geq N$. Donc si $n \geq \max(N, N')$ on a $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l_1}| < \frac{2\epsilon'}{|l_1|^2} = \epsilon$, ce qui prouve le résultat. $\square$

1.2 Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes

Propriété 1.4. 1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration. En posant $w_n = v_n - u_n$, on se ramène à montrer que si une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geq 0$ et converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n \geq 0$. On procède par l'absurde en supposant que $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n < 0$. En prenant $\epsilon = \frac{|l|}{2}$ dans la définition de limite, on obtient qu'il existe un entier naturel N tel que $n > N$ implique $|w_n - l| < \epsilon = -\frac{l}{2}$. En particulier on a pour $n \geq N$ que $w_n < l - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} < 0$, une contradiction. $\square$

Remarque 1.3. 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 0$.

2. Attention: si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$, on ne peut pas affirmer que la limite est strictement positive mais seulement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq 0$. Par exemple la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $u_n = \frac{1}{n+1}$ est à termes strictement positifs, mais converge vers zéro.

Théorème 1.2 (de gendarme). Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles telles que : $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a :

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l \in \mathbb{R}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$.

2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

3. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$; puisque les suites $(u_n)_n$ et $(w_n)_n$ convergent vers l , il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Leftrightarrow |u_n - l| \leq \epsilon)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Leftrightarrow |w_n - l| \leq \epsilon)$. En notant $N_0 = \max(N_1, N_2)$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N_0 \Leftrightarrow \begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \\ |u_n - l| \leq \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon \leq u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l \leq \epsilon \Leftrightarrow |v_n - l| \leq \epsilon. \end{cases}$$

Donc la suite $(v_n)_n$ converge vers l . $\square$

Exemple 1.5. Etudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{(n+1)^2}, \quad n \geq 1$$

u_n est la somme de $2n+2$ termes majorés par $\frac{n}{n^2}$ et minorés par $\frac{n}{(n+1)^2}$ donc quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$(2n+2)\frac{n}{(n+1)^2} \leq u_n \leq (2n+2)\frac{n}{n^2}.$$

La suite de terme général $v_n = \frac{n(2n+2)}{(n+1)^2}$ est convergente et a pour limite 2. La suite de terme général $w_n = \frac{n(2n+2)}{n^2}$ est convergente et a pour limite 2. En conséquence la suite $(u_n)_n$ converge et a pour limite 2.

Remarque 1.4. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l'$ et $l \neq l'$, on ne peut rien dire de v_n .

Exemple 1.6. $u_n = -2 + \frac{1}{n}$, $w_n = 2 + \frac{1}{n}$. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2$.

- Si on prend $v_n = \frac{1}{n}$ on a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et $u_n \leq v_n \leq w_n$.

- Si on prend $v_n = (-1)^n$ n'a pas de limite bien que : $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Remarque 1.5. 1. Si $u_n \rightarrow u \in \mathbb{R}$ et $v_n \rightarrow +\infty$. Alors a) $u_n + v_n \rightarrow +\infty$ et b) $\frac{1}{v_n} \rightarrow 0^+$. c) Si $u > 0$, $u_n v_n \rightarrow +\infty$. d) Si $u < 0$, $u_n v_n \rightarrow -\infty$. e) Si $u = 0$ on ne peut rien dire de la suite $(u_n v_n)$. (forme indéterminée)

2. Si $u_n \rightarrow u \in \mathbb{R}$ et $v_n \rightarrow -\infty$. Alors a) $u_n + v_n \rightarrow -\infty$, b) $\frac{1}{v_n} \rightarrow 0^-$. c) Si $u > 0$, $u_n v_n \rightarrow -\infty$. d) Si $u < 0$, $u_n v_n \rightarrow +\infty$. e) Si $u = 0$ on ne peut rien dire de la suite $(u_n v_n)$ (forme indéterminée)

Exemple 1.7. $u_n = n$, $v_n = \frac{1}{n}$ (la limite du produit est 1).

Exemple 1.8. $u_n = n$, $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ (limite du produit est $+\infty$).

Exemple 1.9. $u_n = n$, $v_n = \frac{1}{n^2}$ (limite du produit est 0).

Si $u_n \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow -\infty$, on ne peut rien dire de la suite $(u_n + v_n)$. (forme indéterminée)

Exemple 1.10. $u_n = n+1$, $v_n = -n$.

Exemple 1.11. $u_n = n+1$, $v_n = -n^2$, $u_n + v_n \rightarrow -\infty$.

Exemple 1.12. $u_n = n+1$, $v_n = -n$, $u_n + v_n$ n'a pas de limite.

Remarque 1.6. Si $u_n \rightarrow +\infty$ et $v_n \rightarrow +\infty$, on peut rien dire de $\frac{u_n}{v_n}$. (forme indéterminée)

Exemple 1.13. $u_n = n+1$ et $v_n = n$.

Exemple 1.14. $u_n = n+1$ et $v_n = \sqrt{n}$.

Exemple 1.15. $u_n = n+1$ et $v_n = n^2$.

Remarque 1.7. Si $u_n \rightarrow 0$ et $v_n \rightarrow 0$, on peut rien dire de $\frac{u_n}{v_n}$. (forme indéterminée)

Exemple 1.16. $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{n^2}$, le rapport tend vers $+\infty$.

Exemple 1.17. $u_n = \frac{1}{n^2}$, $v_n = \frac{1}{n}$, le rapport tend vers 0.

Exemple 1.18. $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{n+1}$, le rapport tend vers 1.

Remarque 1.8. Si $u_n \rightarrow \infty$ et $v_n \rightarrow 0$, on peut rien dire de $u_n^{v_n}$. (forme indéterminée)

Remarque 1.9. Si $u_n \rightarrow 1$ et $v_n \rightarrow \infty$, on peut rien dire de $u_n^{v_n}$. (forme indéterminée)

Exemple 1.19. $u_n = \sqrt{n}$, $v_n = \frac{1}{n}$, $u_n^{v_n}$ tend vers 1.

Exemple 1.20. $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, $v_n = n$, $u_n^{v_n}$ tend vers $\exp(1)$.

1.3 Suite récurrente

Définition 1.6. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par le couple (a, f) , où a est un réel et f une fonction réelle de variable réelle, telle que

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

est appelée suite récurrente (simple).

Le résultat principal concernant les suites récurrentes est résumé dans la proposition suivante.

Propriété 1.5. Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$ telle que $f(I) \subset I$ et soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$ donné. On a:

1. Si (u_n) converge vers l alors $l = f(l)$.
2. Si f est croissante alors (u_n) est monotone et convergente.

Démonstration. 1. La condition $f(I) \subset I$ implique que $u_n \in I$ pour tout n . Si $u_n \rightarrow u$ alors $f(u_n) \rightarrow f(u)$, grâce à la continuité de f en u . D'autre part les suites (u_n) et (u_{n+1}) ayant la même limite, on conclut que $u = f(u)$.

2. 1^{er} cas: Si $u_0 \leq u_1$, la suite (u_n) est croissante, en effet (par récurrence): Si $u_n \leq u_{n+1}$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. La suite (u_n) étant croissante majorée par b donc convergente. 2^o cas: Si $u_0 \geq u_1$ on montre de la même façon que (u_n) est décroissante minorée par a donc convergente. $\square$

Exemple 1.21. Soit la suite u_n définie par la relation de récurrence:

<https://keepmath.com>

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \\ u_0 \geq 0 \end{cases}$$

Si $u_0 \in [0, 2[$ alors u_n est croissante, majorée. Si $u_0 \geq 2$ alors u_n est décroissante, minorée.

Exemple 1.22. Etudier la suite

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n^2} \\ u_0 > 0 \end{cases}$$

Pour cet exemple on utilisera le lemme suivant :

Remarque 1.10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Si les sous suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite l , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et tend vers l .

Propriété 1.6. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue et décroissante. Soit $u_0 \in [a, b]$ et la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors: La sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite l vérifiant $f \circ f(l) = l$. La sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite l' vérifiant $f \circ f(l') = l'$. Il se peut (ou pas !) que $l = l'$.

Démonstration. La preuve se déduit du cas croissant. La fonction f étant décroissante, la fonction $f \circ f$ est croissante. Et on applique la propriété 2.3 à la fonction $f \circ f$ et à la sous-suite (u_{2n}) définie par récurrence $u_2 = f \circ f(u_0)$, $u_4 = f \circ f(u_2)$, ... De même en partant de u_1 et $u_3 = f \circ f(u_1)$, ... $\square$

1.3.1 Suites extraites ou sous-suites.

Définition 1.7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Une suite extraite ou (sous-suite) de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Remarque 1.11. Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. On montre facilement par récurrence que pour tout n , on a $\varphi(n) \geq n$.

Propriété 1.7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, si et seulement si pour toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\varphi(n)} = l$.

Démonstration. $\Rightarrow$ Soit $\epsilon > 0$. D'après la définition de limite, il existe un entier naturel N tel que $n \geq N$ implique $|u_n - l| < \epsilon$. Comme l'application est strictement croissante, on montre facilement par récurrence que pour tout n , on a $\varphi(n) \geq n$. Ceci implique en particulier que si $n \geq N$, alors aussi $\varphi(n) \geq N$ et donc $|u_{\varphi(n)} - l| < \epsilon$. Donc la définition de limite s'applique aussi à la suite extraite.

$\Leftarrow$ il suffit de prendre $\varphi(n) = n$. □

Corollaire 1.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.

Exemple 1.23. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1, et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers -1 (en fait ces deux sous-suites sont constantes). On en déduit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Théorème 1.3 (de Bolzano-Weierstrass). Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

1.3.2 Suites adjacentes

Définition 1.8. On dit que deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont adjacentes si:

1. La suite (u_n) est croissante.
2. La suite (v_n) est décroissante.
3. La suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Propriété 1.8. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

Démonstration. Supposons que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante. Montrons, par absurde, que $u_n \leq v_n$ pour tout n . Supposons qu'il existe N tel que $\alpha = u_N - v_N > 0$, donc pour $n \geq N$ on a : $u_n \geq u_N$ et $v_N \geq v_n$ par suite

$$u_n - v_n \geq u_N - v_N = \alpha > 0$$

pour tout $n \geq N$ ce qui est impossible car $u_n - v_n$ tend vers 0. Par suite, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$, on en déduit que: La suite (u_n) est croissante majorée par v_0 donc convergente vers l . La suite (v_n) est décroissante minorée par u_0 donc convergente vers l' . La suite $(u_n - v_n)$ converge vers $l - l' = 0$ donc $l = l'$. □

Exemple 1.24. Les suites données par (u_n) et $(v_n)_{n \geq 1}$ $u_n = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, et $v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$, $n \geq 1$, sont adjacentes. En effet La suite (u_n) est croissante car: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geq 0$. La suite (v_n) est décroissante car:

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{(n+1)(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{1}{n(n+1)(n+1)!} [n + n(n+1) - (n+1)^2] \\ &= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} \leq 0. \end{aligned}$$

De plus $v_n - u_n = \frac{1}{n \cdot n!} \rightarrow 0$ Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On en déduit que (u_n) et (v_n) convergent.

Exemple 1.25. Les suites données par (u_n) et $(v_n)_{n \geq 1}$ $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, $v_n = 1 + \frac{1}{n}$ sont adjacentes. Voici enfin deux théorèmes très souvent utilisés pour calculer des limites de suites.

1.3.3 Les suites de Cauchy

Définition 1.9. Une suite réelle $(u_n)_n$ est dite de Cauchy si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \geq q \geq n_0, \quad |u_p - u_q| \leq \epsilon$$

Propriété 1.9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est de Cauchy} \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}$$

Démonstration. Le sens direct

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est de Cauchy} \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}$$

est vrai dans $\mathbb{R}$. Si $(u_n)_n$ converge vers a , pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - a| \leq \epsilon$. Donc $\forall n \geq m \geq n_0$,

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - a| + |a - u_m| \leq 2\epsilon$$

Démontrons maintenant la réciproque

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge} \Rightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est de Cauchy.}$$

Cette réciproque définit les espaces complets. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$, $|u_p - u_q| \leq \epsilon$. Donc en particulier $\forall p \geq n_0$,

$$|u_p| \leq |u_p - u_{n_0}| + |u_{n_0}| \leq \epsilon + |u_{n_0}|.$$

Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_n| \leq \max(\max_{n < n_0} |u_n|, \epsilon + |u_{n_0}|),$$

i.e. $(u_n)_n$ est bornée et donc par Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite convergente, $u_{\varphi(n)} \rightarrow a$. Donc il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $|u_{\varphi(n)} - a| \leq \epsilon$. On a donc, pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$,

$$|u_n - a| \leq |u_n - u_{\varphi(n)}| + |u_{\varphi(n)} - a| \leq 2\epsilon$$

car $\varphi(n) \geq n \geq \max(n_0, n_1)$. Donc la suite $(u_n)_n$ est convergente. $\square$

1.4 Suites arithmétiques

Définition 1.10. Une suite (u_n) est dite arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Le nombre réel r est appelé la raison de la suite arithmétique (u_n) .

Propriété 1.10. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r , alors

$$u_n = u_0 + nr \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence: Pour $n = 0$, on a $u_0 = u_0$. Supposons que la propriété est vraie pour n , et montrons qu'elle reste également vraie pour $n + 1$. On a par définition:

$$u_{n+1} = u_n + r = (u_0 + nr) + r = u_0 + (n + 1)r$$

donc la propriété est vraie pour $n + 1$. Ce qui prouve que la propriété est vraie pour tout n . $\square$

Remarque 1.12. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r . Si $r = 0$ la suite (u_n) est constante. Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante. Si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Propriété 1.11. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r , alors:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n$, alors

$$u_p + u_{n-p} = u_0 + pr + u_0 + (n-p)r = u_0 + u_n,$$

il en résulte, si on écrit: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_p + \dots + u_n$ et $S_n = u_n + u_{n-1} + \dots + u_{n-p} + \dots + u_0$ et en faisant la somme, que $2S_n = (n+1)(u_0 + u_n)$. $\square$

Remarque 1.13. Si le premier terme de la suite est u_1 , alors

$$S_n = n \frac{u_1 + u_n}{2}$$

Exemple 1.26. 1. La suite (u_n) définie par $u_n = n$ est arithmétique de raison 1 donc :

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. La suite (u_n) définie par $u_n = 2n + 1$ est arithmétique de raison 2 donc :

$$S_n = 1 + 3 + \dots + (2n+1) = \frac{(n+1)(1+2n+1)}{2} = (n+1)^2.$$

<https://keepmath.com>

1.5 Suites géométriques

Définition 1.11. Une suite (u_n) est dite géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le nombre réel q est appelé la raison de la suite géométrique (u_n) .

Remarque 1.14. Si $q = 0$ tous les termes de la suite sont nuls sauf, peut être, u_0 . Nous supposons dans la suite que $q \neq 0$.

Propriété 1.12. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q , alors:

$$u_n = q^n u_0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Démonstration. Pour $n = 0$ on a $u_0 = q^0 u_0 = u_0$. Supposons la propriété vraie pour n et montrons qu'elle reste vraie pour $n + 1$. On a par définition: $u_{n+1} = qu_n = q(q^n u_0) = q^{n+1} u_0$. Ce qui prouve que la propriété est vraie pour tout n . $\square$

Propriété 1.13. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q , alors:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ si } q \neq 1 \quad S_n = (n+1)u_0 \text{ si } q = 1.$$

En particulier, si $0 < |q| < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = u_0 \frac{1}{1-q}$.

Démonstration. On a: $S_n = u_0 + qu_0 + \dots + q^n u_0 = u_0(1 + q + \dots + q^n)$ donc par suite si $q \neq 1$ on a:

$$S_n - qS_n = (1 - q)S_n = u_0(1 - q^{n+1})$$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Si $q = 1$ on a: $u_n = u_0$ pour tout n et S_n contient $n + 1$ termes. Si $0 < |q| < 1$ alors $q^n \rightarrow 0$, □

Découvrez la suite du cours et des exercices interactifs sur **KeepMath.com**

<https://keepmath.com>