

Intégrales Généralisées

0.1 Définitions et Exemples

Définition 0.1 (Fonction localement intégrable). Soit f une fonction réelle définie sur $]a, b[$. On dit que f est **localement intégrable** sur $]a, b[$ si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$.

Exemple. La fonction $\frac{1}{x}$ est localement intégrable sur $]0, 1]$.

0.2 Intégrale sur $[a, b[$ ou $]a, b]$

Définition 0.2 (Intégrale généralisée sur $[a, b[$). Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b[$, $(-\infty < a < b \leq +\infty)$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est **convergente** si la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x < b,$$

admet une limite finie quand x tend vers b ; et on pose par définition :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$$

Si cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale est **divergente**.

Définition 0.3. Soit f une fonction continue sur $]a, b]$, $(-\infty \leq a < b < +\infty)$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est **convergente** si la fonction

$$F : x \mapsto \int_x^b f(t) dt, \quad a < x \leq b,$$

admet une limite finie quand x tend vers a ; et on pose par définition :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t) dt.$$

0.3 Exemples fondamentaux

Exemple. La fonction $\int_0^x \cos t dt = \sin x$ n'admet pas de limite lorsque $x \rightarrow \infty$, donc l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} \cos t dt$$

est divergente.

Exemple. La fonction $\int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x}$ tend vers 1 lorsque $x \rightarrow +\infty$, donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1.$$

Exemple. La fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ n'est pas bornée sur l'intervalle $[0, 1[$. Cependant, pour $x \in [0, 1[$,

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [\arcsin t]_0^x = \arcsin x \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et a pour valeur $\frac{\pi}{2}$.

Exemple. La fonction $f(x) = e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$F(x) = \int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. Par suite l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ est convergente et on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Exemple. La fonction $f(x) = \sin x$ est continue sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$F(x) = \int_0^x \sin t dt = 1 - \cos x.$$

$F(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers $+\infty$, donc l'intégrale de $\sin$ sur $[0, +\infty[$ est divergente.

Exemple. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $] -\infty, +\infty[$ et on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 \frac{dt}{1+t^2} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2},$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

<https://keepmath.com>

Exemple. Calculons $\int_0^1 t \ln t dt$.

La fonction $t \mapsto t \ln t$ est continue sur $]0, 1]$, mais admet pour prolongement par continuité en 0 la fonction g telle que $g(t) = f(t)$ si $t \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Par suite $\int_0^1 t \ln t dt$ existe et on a :

$$\int_0^1 t \ln t dt = \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 t \ln t dt.$$

Or,

$$\int_x^1 t \ln t dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_x^1 - \int_x^1 \frac{t}{2} dt = -\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4}.$$

Donc

$$\int_0^1 t \ln t dt = -\frac{1}{4}.$$

Exemple. La fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $]0, 1]$, et pour tout $x \in]0, 1]$,

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x}.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 2$, par suite l'intégrale de f sur $]0, 1]$ est convergente et on a :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

Exemple. La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est continue sur $]0, 1]$, et on a pour tout $x \in]0, 1]$,

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_x^1 = -1 + \frac{1}{x}.$$

De plus $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty$, donc l'intégrale de f sur $]0, 1]$ est divergente.

Exemple. La fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est continue sur $[1, +\infty[$, et pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t} \right]_1^x = 2\sqrt{x} - 2.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$, par suite l'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ est divergente.

Exemple. La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$, et on a pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1.$$

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$, donc l'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ est convergente et on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

0.4 Remarques importantes <https://keepmath.com>

Remarque. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, la limite

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx$$

peut exister sans que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ soit convergente.

En effet, il suffit de prendre une fonction f impaire quelconque ; par exemple $f(x) = x$, on a alors pour tout $a > 0$:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Mais les intégrales $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ divergent.

Remarque. Soit f une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ et soit F une primitive de f sur $]a, b[$. La convergence de l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ équivaut à l'existence des deux limites finies $F(a^+)$ et $F(b^-)$; et si ces limites existent, on a :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b^-) - F(a^+).$$

0.5 Intégrales sur $]a, b[$

Définition 0.4. Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle $]a, b[$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, et soit $c \in]a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est **convergente** si les intégrales

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{et} \quad \int_c^b f(x) dx$$

sont convergentes et on pose alors :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Dans ce cas, $\int_a^b f(x) dx$ est indépendante du choix du point c .

Remarque. Les intégrales définies ci-dessus sont appelées **intégrales généralisées** ou **impropres**.

1 Critères de convergence

1.1 Intégrales de Riemann

Proposition 1.1 (Intégrales de Riemann). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

- L'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge pour $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$.
- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

Démonstration.

Si $\alpha \neq 1$, pour tout $x > 0$ on a :

$$F(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} [t^{1-\alpha}]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} [1 - x^{1-\alpha}].$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

De même, pour tout $x > 0$ on a :

$$G(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = -F(x),$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Si $\alpha = 1$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = +\infty,$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{dt}{t} = +\infty.$$

□

1.2 Le cas de fonctions positives localement intégrables

Proposition 1.2 (Intégrales des fonctions positives). *Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ localement intégrable. L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si et seulement si l'ensemble*

$$\left\{ \int_a^x f(t) dt \mid x \in [a, b[\right\}$$

est majoré ; dans ce cas

$$\int_a^b f(t) dt = \sup_{x \in [a, b[} \int_a^x f(t) dt.$$

1.3 Critère de comparaison

Théorème 1.1 (Critère de comparaison). *Soient f et g deux applications localement intégrables de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que :*

$$\forall t \in [c, b[, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Alors :

- $\int_a^b g(t) dt$ convergente $\implies \int_a^b f(t) dt$ convergente.
- $\int_a^b f(t) dt$ divergente $\implies \int_a^b g(t) dt$ divergente.

Démonstration.

<https://keepmath.com>

Soit $c \in [a, b[$. Pour tout $x \in [c, b[$ on a :

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^x f(t) dt.$$

Donc les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont de même nature ; car $\int_a^c f(t) dt$ est une constante.

De la même façon, on voit que les intégrales $\int_a^b g(t) dt$ et $\int_c^b g(t) dt$ sont de même nature.

Il suffit d'étudier la convergence de $\int_c^b f(t) dt$ et de $\int_c^b g(t) dt$.

Sachant que $\forall x \in [c, b[, 0 \leq \int_c^x f(t) dt \leq \int_c^x g(t) dt$, la conclusion résulte du théorème des intégrales des fonctions positives. $\square$

1.4 Théorème des équivalents

Théorème 1.2 (Théorème des équivalents). *Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a, +\infty[$. Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire :*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1.$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(t) dt$ converge.

Démonstration.

Dire que deux fonctions sont équivalentes au voisinage de $+\infty$, c'est dire que leur rapport tend vers 1, ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a, \forall t > A, \left| \frac{f(t)}{g(t)} - 1 \right| < \varepsilon,$$

soit encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A > a, \forall t > A, (1 - \varepsilon)g(t) < f(t) < (1 + \varepsilon)g(t).$$

Fixons $\varepsilon < 1$, et appliquons le théorème de comparaison sur l'intervalle $[A, +\infty[$.

Si l'intégrale $\int_A^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors l'intégrale $\int_A^{+\infty} (1 - \varepsilon)g(t) dt$ converge, donc l'intégrale $\int_A^{+\infty} g(t) dt$ aussi par linéarité.

Inversement, si $\int_A^{+\infty} f(t) dt$ diverge, alors $\int_A^{+\infty} (1 + \varepsilon)g(t) dt$ diverge, donc $\int_A^{+\infty} g(t) dt$ diverge aussi. $\square$

Exemple. Est-ce que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} dt$$

converge ?

Comme

$$\frac{t^5 + 3t + 1}{t^3 + 4} \sim_{+\infty} t^2$$

et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^2 dt$ diverge, alors notre intégrale diverge.

Exemple. On a

$$\frac{x}{\sqrt{x^3 + 1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}},$$

donc $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3 + 1}} dx$ diverge.

1.5 Critère d'équivalence au voisinage de b

Théorème 1.3 (Critère d'équivalence). Soit $I = [a, b[$, $(-\infty < a < b \leq +\infty)$. Soient f et g deux fonctions continues, positives sur I . Si f et g sont équivalentes au voisinage de b : $f \sim_b g$, alors les intégrales

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^b g(t) dt$$

sont de même nature.

Exemple. On a

$$\frac{e^x}{\sqrt{x}} \sim_0 \frac{1}{\sqrt{x}},$$

donc $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ converge.

Exemple. On a

$$\frac{\sin x}{x^2} \sim_0 \frac{1}{x^2},$$

donc $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx$ diverge.

1.6 Critère de Cauchy

Théorème 1.4 (Critère de Cauchy). Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une application localement intégrable. L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si et seulement si f vérifie la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a, b[, \forall x_1, x_2 \in [c, b[, \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

1.7 Convergence absolue

Définition 1.1 (Convergence absolue). Soit $I =]a, b[$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et f une fonction continue sur I . On dit que l'intégrale de f sur I est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente.

Proposition 1.3. Soit $I =]a, b[$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ et f une fonction continue sur I . S'il existe une fonction g continue sur I telle que

$$\begin{cases} 0 \leq |f| \leq g & \text{sur } I, \\ \int_a^b g(t) dt & \text{converge,} \end{cases}$$

alors $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.

Corollaire 1.1. Si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

<https://keepmath.com>

Remarque. La réciproque de ce corollaire est en général fausse.

Exemple. Étude de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$.

Comme la fonction $f(t) = \frac{\cos t}{t^2}$ n'est pas positive, on va étudier l'intégrale de $|f|$.

On a : $|f(t)| \leq \frac{1}{t^2}$; comme $\alpha = 2 > 1$, l'intégrale de $|f|$ est convergente, donc aussi l'intégrale de f .

Exemple. Montrons que $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\sin t)^n dt$ converge.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$|e^{-t} (\sin t)^n| \leq e^{-t}.$$

Or, $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, donc I_n converge.

1.8 Critères de convergence avec $t^\alpha f(t)$

Proposition 1.4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $]a, b[$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow a} (t - a)^\alpha f(t) = k \in \mathbb{R}.$$

- Si $\alpha < 1$, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente.
- Si $\alpha \geq 1$ et $k \neq 0$, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est divergente.

Proposition 1.5. Soient $a \in \mathbb{R}$, f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = k \in \mathbb{R}.$$

- Si $\alpha > 1$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est absolument convergente.
- Si $\alpha \leq 1$ et $k \neq 0$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est divergente.

Exemple. Montrons que $\int_2^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$ converge.

On a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t} \ln t = 0,$$

donc $\int_2^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$ est absolument convergente.

1.9 Intégrale semi-convergente

Définition 1.2 (Intégrale semi-convergente). Une intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est **semi-convergente** si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Exemple.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ est semi-convergente.}$$

Pour le montrer, effectuons une intégration par parties (avec $u' = \sin t$, $v = \frac{1}{t}$) :

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Examinons les deux termes :

- $\left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^x = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1$. Or $\frac{\cos x}{x}$ tend vers 0 (lorsque $x \rightarrow +\infty$), car $\cos x$ est bornée et $\frac{1}{x}$ tend vers 0.
- Pour l'autre terme, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ est absolument convergente car $\left| \frac{\cos t}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$.

Conclusion : $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$ admet une limite finie, donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

L'intégrale n'est pas absolument convergente (on le vérifie en utilisant $\sin^2 t$).

1.10 Théorème d'Abel

Théorème 1.5 (Théorème d'Abel). Soit f une fonction C^1 sur $[a, +\infty[$, positive, décroissante, ayant une limite nulle en $+\infty$. Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$, telle que la primitive $\int_a^x g(t) dt$ soit bornée.

Alors l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(t)g(t) dt$$

converge.

Exemple.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \text{ est semi-convergente.}$$

Avec $f(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = \sin t$, on retrouve que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

Exemple. Si α est un réel strictement positif, et k un entier positif impair, alors l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^k(t)}{t^\alpha} dt$$

converge.

Remarquons que cette intégrale n'est absolument convergente que pour $\alpha > 1$.

<https://keepmath.com>