

1 Fonctions Réelles d'une Variable Réelle

1.1 Notions de fonction

Définition 1.1. On appelle fonction numérique, toute application f définie d'une partie D de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$:

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x)$$

l'ensemble D , noté D_f , est appelé domaine de définition de f . L'ensemble $C_f = \{(x, f(x)), x \in D_f\}$ est appelé courbe représentative, ou graphe de f .

Remarque 1.1. Dans la suite, on appellera fonction toute fonction numérique d'une variable réelle.

Exemple 1.1. Soient a et b deux nombres réels. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ s'appelle une fonction affine. Elle est définie sur toute la droite réelle.

Exemple 1.2. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$.

Exemple 1.3. La fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ est définie sur $] -\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

Exemple 1.4. La fonction $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est définie sur $[-1, 1]$

Exemple 1.5. La fonction $f(x) = \sin(x)$ est définie sur tout $\mathbb{R}$.

1.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 1.2. Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors:

- $f \geq g$ si $\forall x \in D, f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ si $\forall x \in D, f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ si $\forall x \in D, f(x) > 0$;
- f est dite constante sur D si $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) = a$;
- f est dite nulle sur D si $\forall x \in D, f(x) = 0$.

<https://keepmath.com>

Définition 1.3. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que:

- f est majorée sur D si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \leq M$;
- f est minorée sur D si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D, f(x) \geq m$;
- f est bornée sur D si f est à la fois majorée et minorée sur D , c'est-à-dire si $\exists M > 0, \forall x \in D, |f(x)| \leq M$.

1.3 Parité et périodicité

Définition 1.4. Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle

- f est paire si et seulement si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
- f est impaire si et seulement si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

Remarque 1.2. Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 1.6. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ est paire. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^3$ est impaire.

Définition 1.5. Soit $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle, on dit que f est périodique de période $T > 0$ si et seulement si

- i) $\forall x \in D_f, x + T \in D_f$
- ii) $\forall x \in D_f, f(x + T) = f(x)$

T est le plus petit réel strictement positif qui vérifie ii).

Remarque 1.3. Le graphe d'une fonction périodique de période T est invariant par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

1.4 Opération sur les fonctions

Définition 1.6. Si f et g sont deux fonctions réelles d'une variable réelle, on appelle somme et produit de f et g les fonctions $s = f + g$ et $p = f \times g$ définies par : $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $s(x) = f(x) + g(x)$ et $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $p(x) = f(x) \times g(x)$.

Définition 1.7. Si f est une fonction réelle d'une variable réelle, on appelle produit de la fonction f par un nombre réel α la fonction $g = \alpha.f$ définie par : $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec $g(x) = \alpha \times f(x)$.

Définition 1.8. Soient f et g deux fonctions réelles d'une variable réelle définies respectivement sur partie E de $\mathbb{R}$ et sur une partie F de $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in E$ on ait $f(x) \in F$. On définit sur E la fonction composée de f et g , que l'on note $g \circ f$ par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Remarque 1.4. Il faut faire attention à l'ordre dans lequel on compose car $g \circ f \neq f \circ g$.

Remarque 1.5. Il faut faire aussi attention aux domaines de définitions de fonctions composées.

1.5 Limites

Définition 1.9. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage V de x_0 sauf, peut-être, en x_0 . On dit que f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ au point x_0 si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : (\forall x \in V \text{ et } 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon,$$

on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Remarque 1.6. L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. L'inégalité $|f(x) - l| < \epsilon$ équivaut à $f(x) \in]l - \epsilon, l + \epsilon[$.

Exemple 1.7. $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ pour tout $x_0 \geq 0$. La fonction partie entière E n'a pas de limite aux points $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.10. 1. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ au point x_0 si : $\forall A > 0, \exists \delta > 0 : (x \in V \text{ et } 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow f(x) > A$. On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

2. On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ au point x_0 si : $\forall A > 0, \exists \delta > 0 : (x \in V \text{ et } 0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow f(x) < -A$. On écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Définition 1.11. Soit f une fonction définie sur $I = [a, b]$, ($a < b$) sauf, peut-être, aux points a et b .

1. On dit que f admet pour limite, $l \in \mathbb{R}$, à droite en a si : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : (x \in I \text{ et } 0 < x - a < \eta) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$, on écrit $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$.

2. On dit que f admet pour limite, $l \in \mathbb{R}$, à gauche en b si : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 : (x \in I \text{ et } 0 < b - x < \eta) \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$, on écrit $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = l$.

Exemple 1.8. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x > 1 \\ x + 1 & \text{si } x \leq 1. \end{cases}$ Alors $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$.

Remarque 1.7. Pour qu'une fonction possède une limite en un point il faut et il suffit qu'elle possède en ce point des limites à droite et à gauche qui sont égales.

1.6 Propriétés des limites et opération

Propriété 1.1. Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ sauf peut-être en x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ en x_0 et g admet pour limite $l' \in \mathbb{R}$ en x_0 alors les fonctions $f + g$, λf et fg ont une limite en x_0 et on a :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = l + l'$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l$,
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = ll'$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$ si $l \neq 0$.
- Si dans un voisinage de x_0 on a $f(x) \geq 0$, alors $l \geq 0$.

1.7 Fonctions continues

Définition 1.12. Soit f une fonction définie sur un voisinage V de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est continue en x_0 si f admet une limite finie en x_0 et cette limite est égale à $f(x_0)$: c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Exemple 1.9. La fonction $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.13. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, ($a < b$).

- On dit que f est continue à droite en a si : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est continue à gauche en b si $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Exemple 1.10. La fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x & \text{si } x < 1, \end{cases}$ est continue à droite en 1 mais n'est pas continue à gauche en 1.

1.8 Fonctions continues sur un intervalle

Définition 1.14. Une fonction définie sur un intervalle I est dite continue sur I , si elle est continue en tout point de I .

Théorème 1.1 (Théorème des valeurs intermédiaires T. V.I.). Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$, et λ un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Théorème 1.2 (Point fixe). Si f est une fonction continue de $[a, b]$ vers $[a, b]$ alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Le point x_0 est appelé point fixe de f .

Théorème 1.3. Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe x_0 et x_1 dans $[a, b]$ tels que $m = f(x_0) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$, $M = f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x)$ et $f([a, b]) = [m, M]$.

1.9 Fonctions réciproques

Définition 1.15. Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction, avec E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.

- f est injective si $\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
- f est surjective si $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$;
- f est bijective si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$.

Théorème 1.4 (Théorème de la bijection). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I , alors

- 1. f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,
- 2. la fonction réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f .

<https://keepmath.com>