

Séries Numériques

1 Définitions et exemples

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Série numérique). On appelle **série numérique** toute suite de la forme

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n,$$

avec (u_n) une suite réelle.

On note $\sum u_n$ la série de terme général (u_n) .

Définition 1.2 (Somme partielle). On appelle **somme partielle** d'indice n de la série $\sum u_n$ le nombre :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Définition 1.3 (Convergence d'une série). Si la suite (S_n) converge vers S , on dit que la série $\sum u_n$ **converge** de somme S et on note :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

On appelle **reste** de rang p la différence $R_p = S - S_p$.

Si la série n'est pas convergente, elle est **divergente**.

<https://keepmath.com>

Remarque. Les premiers termes de la série interviennent pour le calcul de S mais pas pour la convergence.

1.2 Condition nécessaire de convergence

Proposition 1.1 (Condition nécessaire de convergence). Si la série $\sum u_n$ converge, alors u_n converge vers 0.

La réciproque est fausse.

Démonstration.

On a la relation pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Donc si la série $\sum u_n$ converge, la suite S_n converge vers S , on en déduit que la suite u_n converge vers $S - S = 0$. $\square$

Remarque. La réciproque est fausse. En effet, la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ a son terme général qui tend vers 0, mais elle diverge.

Pour le montrer, on note S_n la somme partielle :

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \cdots + \frac{1}{n+1} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Donc si la série harmonique converge, la suite $S_{2n} - S_n$ converge vers 0, ce qui est impossible.

1.3 Combinaisons linéaires de séries convergentes

Proposition 1.2. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent vers S et S' respectivement, alors pour tous réels λ et β , la série $\sum (\lambda u_n + \beta v_n)$ est convergente de somme $\lambda S + \beta S'$.

Corollaire 1.1. Si $\sum a_n$ converge mais $\sum b_n$ diverge, alors $\sum (a_n + b_n)$ diverge.

1.4 Les restes d'une série

Définition 1.4 (Reste d'une série convergente). Si $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est une série convergente, alors son reste à l'indice $n \geq n_0$ est la somme de la série (convergente) :

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k.$$

Proposition 1.3. Soit $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ une série convergente et soit pour tout $n \geq n_0$, $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0.$$

1.5 Critère de Cauchy

Définition 1.5 (Critère de Cauchy). On dit que la série $\sum u_n$ vérifie le **critère de Cauchy** si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p \geq N, \forall q \geq p, \left| \sum_{n=p}^q u_n \right| \leq \varepsilon.$$

Théorème 1.1 (Critère de Cauchy). Une série numérique $\sum u_n$ est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

2 Séries à termes positifs

Définition 2.1. On dit que la série $\sum u_n$ est **à termes positifs** si $u_n \geq 0$ pour tout entier n .

Proposition 2.1. La suite des sommes partielles (S_n) est croissante. Par conséquent, la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite (S_n) est majorée.

Démonstration.

On applique le théorème de la convergence monotone. □

2.1 Critères de comparaison

Théorème 2.1 (Critères de comparaison). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs vérifiant :

$$0 \leq u_n \leq v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge et

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

Théorème 2.2. Soient $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ deux suites réelles positives équivalentes ($\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$). Alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

Démonstration.

Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists n_0$ tel que pour $n \geq n_0$ on ait :

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$0 < \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n.$$

On applique ensuite le théorème de comparaison. □

Exemple. Montrons que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculons sa somme.

Nous avons $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

Calculons la somme partielle S_n :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

<https://keepmath.com>

Donc :

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1.$$

Théorème 2.3 (Comparaison série-intégrale). Soit $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ décroissante continue par morceaux. Alors la série $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n)$ et l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.

Si l'intégrale $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$ converge, alors pour tout $n > n_0$:

$$\int_n^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n-1}^{+\infty} f(t) dt.$$

2.2 Séries de Riemann

Définition 2.2 (Série de Riemann). Toute série de la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, est dite **série de Riemann**.

Théorème 2.4 (Convergence d'une série de Riemann). La série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition 2.2 (Règle de Riemann). 1. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$ ($l < +\infty$), alors la série de terme général u_n converge.

2. S'il existe $\alpha \leq 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow l > 0$, alors la série de terme général u_n diverge.

Exemple. 1. $u_n = \frac{n^4 \ln^3 n}{e^{2n}}$.

Nous avons $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}$, et donc en particulier pour $\alpha > 1$. La série converge.

2. $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^{1993}}$.

Comparons avec l'intégrale :

$$\int_2^n \frac{dx}{x(\ln x)^{1993}} = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{dv}{v^{1993}}.$$

Cette intégrale converge car $1993 > 1$. Donc la série converge.

3. $u_n = \frac{1 + \ln n}{n\sqrt{n}}$.

On a $u_n \sim \frac{\ln n}{n\sqrt{n}} = v_n$.

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha v_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha \geq \frac{3}{2}, \\ 0 & \text{si } \alpha < \frac{3}{2}. \end{cases}$

Donc la série $\sum v_n$ converge et comme $u_n \sim v_n$, $\sum u_n$ converge.

<https://keepmath.com>

2.3 Séries de Bertrand

Théorème 2.5 (Séries de Bertrand). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si ($\alpha > 1$) ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

2.4 Règle de Cauchy

Théorème 2.6 (Règle de Cauchy). Soit $\sum a_n$ une série numérique. On pose

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{1/n}.$$

1. Si $\lambda < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument.

2. Si $\lambda > 1$, la série $\sum a_n$ diverge.

2.5 Règle de d'Alembert

Théorème 2.7 (Règle de d'Alembert). Soit $\sum a_n$ une série numérique vérifiant $a_n \neq 0$ pour tout $n \geq n_0$. Posons

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}.$$

1. Si $l < 1$, la série $\sum a_n$ converge absolument.

2. Si $l > 1$, la série $\sum a_n$ diverge.

3 Séries à termes réels de signe quelconques

3.1 Absolue convergence

Définition 3.1 (Absolue convergence). On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition 3.1. Toute série absolument convergente est convergente. La réciproque est fausse.

Démonstration.

On remarque que $\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$ et on utilise le critère de Cauchy. $\square$

Exemple. La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente.

La réciproque est fausse : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

3.2 Séries alternées

Définition 3.2 (Série alternée). On dit qu'une série $\sum u_n$ à termes réels est **alternée** si son terme général $u_n = (-1)^n v_n$ où $v_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.1 (Critère spécial des séries alternées). Soit $\sum (-1)^n u_n$ une série alternée. Si la suite (u_n) est décroissante et converge vers 0, alors la série alternée converge.

3.3 Théorème d'Abel <https://keepmath.com>

Théorème 3.2 (Règle d'Abel). Soit (a_n) une suite décroissante de réels qui converge vers 0. Soit (b_n) une suite de réels telle que les sommes partielles de la série de terme général b_n soient bornées. Alors, la série $\sum a_n b_n$ est convergente.

Remarque. Ce théorème redonne comme cas particulier (avec $b_n = (-1)^n$) le critère spécial des séries alternées.

Exemple. Si $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, les sommes partielles de la série de terme général $b_n = e^{in\theta}$ vérifient :

$$\left| \sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right| \leq \frac{2}{2|\sin(\theta/2)|}.$$

On peut donc appliquer la règle d'Abel aux séries (de Fresnel) :

$$\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}, \quad \sum_n \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}, \quad \sum_n \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha},$$

qui sont convergentes pour tout $\alpha > 0$.

4 Produit de Cauchy

Théorème 4.1 (Produit de Cauchy). Si on considère deux séries de nombres réels de termes généraux u_n, v_n , on appelle **produit de Cauchy** la série de terme général

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}.$$

Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série w_n est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

5 Exercices

1. Étudier la convergence des séries suivantes :

(a) $\sum \frac{n^2}{n^2 + 1}$

(b) $\sum \frac{n^2}{n^3 + 1}$

(c) $\sum \frac{n^2}{n^4 + 1}$

(d) $\sum \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

(e) $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(f) $\sum \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$

(g) $\sum 2^n$

(h) $\sum \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n$

(i) $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(j) $\sum \frac{1}{n!}$

(k) $\sum \frac{n^{100000}}{n!}$

(l) $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$

(m) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

(n) $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$

<https://keepmath.com>

a) $\frac{n^2}{n^2 + 1} \rightarrow 1 \neq 0$: divergente.

b) $\frac{n^2}{n^3 + 1} \sim \frac{1}{n}$: divergente (Riemann $\alpha = 1$).

c) $\frac{n^2}{n^4 + 1} \sim \frac{1}{n^2}$: convergente (Riemann $\alpha = 2 > 1$).

d) $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$: convergente.

e) $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$: série géométrique de raison $q = \frac{1}{2} < 1$: convergente.

- f) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{1}{2^n}$: convergente.
- g) $\sum 2^n$: série géométrique de raison $q = 2 > 1$: divergente.
- h) $\left(2 - \frac{1}{n}\right)^n \sim 2^n$: divergente.
- i) $\sum \left(\frac{1}{3}\right)^n$: série géométrique de raison $q = \frac{1}{3} < 1$: convergente.
- j) $\sum \frac{1}{n!}$: convergente (d'Alembert : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$).
- k) $\sum \frac{n^{100000}}{n!}$: convergente (d'Alembert).
- l) $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$: absolument convergente.
- m) $\sum \frac{(-1)^n}{n}$: convergente (série alternée), semi-convergente.
- n) $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$: convergente (série alternée).

<https://keepmath.com>