

1 Dérivabilité des fonctions d'une variable réelle.

1.1 Dérivée d'une fonction

Définition 1.1. Soit f une fonction définie sur un voisinage I de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en x_0 si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Le nombre réel (unique) α est appelé dérivée de f en x_0 et noté $f'(x_0)$. Si f est dérivable en tout point de I on dit qu'elle est dérivable sur I .

Exemple 1.1. La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $I =]0, +\infty[$. En effet; soit $x_0 \in I$, si $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}, \text{ et } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Exemple 1.2. Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f(x) = x^n$, est dérivable sur $\mathbb{R}$, en effet; soit $x_0 \in \mathbb{R}$ pour $x \neq x_0$, on a :

$$\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = (x^{n-1} + \dots + x^{n-m-1}x_0^m + \dots + x_0^{n-1}),$$

donc :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + \dots + x^{n-m-1}x_0^m + \dots + x_0^{n-1}) = nx_0^{n-1}.$$

1.1.1 Interprétation géométrique

Soient $M_0(x_0, f(x_0))$, $M(x_0 + h, f(x_0 + h))$, $h \neq 0$, deux points de C_f et D la droite passant par M_0 et M . Désignons par $y = ax + b$ l'équation de la droite D . Comme $M \in D$ et $M_0 \in D$ on a : $f(x_0) = ax_0 + b$ et $f(x_0 + h) = a(x_0 + h) + b$. En faisant la différence on obtient :

$$a = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Fixons x_0 et faisant varier h , on notera alors a par $a(h)$. Ainsi $y = a(h)x + b$ et $b = f(x_0) - a(h)x_0$ donc $y = a(h)(x - x_0) + f(x_0)$. En outre, si h tend vers 0, alors M tend vers M_0 et la droite D tend vers une position limite T ; qui est par définition la tangente en M_0 à C_f . Pour trouver l'équation de la tangente T il suffit de calculer

$$\lim_{h \rightarrow 0} a(h).$$

Or

$$\lim_{h \rightarrow 0} a(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

On obtient alors, l'équation de la tangente T :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Propriété 1.1. Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

Remarque 1.1. La réciproque est fausse.

Exemple 1.3. $f(x) = |x|$ sur $] -1, 1[$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable au point 0.

Définition 1.2. Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un point x_0 . On dit que f est dérivable à droite en x_0 si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l' \in \mathbb{R}.$$

On les note respectivement $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$.

Exemple 1.4. La fonction $f(x) = [x]$ est dérivable à droite et à gauche en 0 mais n'est pas dérivable en 0. En effet, si $x \neq 0$ le rapport $\frac{f(x)}{x}$ est égal à 1 si $x > 0$ et à -1 si $x < 0$ donc $f'_d(0) = 1$ et $f'_g(0) = -1$.

Propriété 1.2. Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

1.2 Opération sur les fonctions dérivables

Propriété 1.3. Soient f, g deux fonctions définies sur un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables en x_0 . Alors:

1. $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$
3. fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + g(x_0)f'(x_0)$
4. Si $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

1.3 Dérivée d'une fonction composée

Propriété 1.4. Soient f une fonction définie sur un voisinage I d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et g une fonction définie sur un voisinage J de $f(x_0)$. Si f est dérivable au point x_0 et g dérivable au point $f(x_0)$. Alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

1.4 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 1.1. Si f est dérivable en x_0 , et si $f'(x_0) \neq 0$, alors g est dérivable au point $y_0 = f(x_0)$ et l'on a:

$$g'(y_0) = (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

1.5 Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I . Si la fonction dérivée f' : $x \mapsto f'(x)$ est elle-même dérivable sur I , elle admet une fonction dérivée définie sur I qui s'appelle la fonction dérivée seconde de f (ou la fonction dérivée d'ordre 2 de f et qu'on note f'' ou $f^{(2)}$). On dit que f est dérivable deux fois sur I . D'une manière générale, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si f est dérivable n fois sur I , on définit la dérivée d'ordre n de f , notée $f^{(n)}$ par: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ et $f^{(0)} = f$.

1.6 Fonction de classe C^p

Définition 1.3. Soit I un intervalle ouvert et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est dérivable et si la fonction f' est continue sur I , on dit que f est de classe C^1 sur I .

Définition 1.4. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle ouvert et soit p un entier supérieur ou égal à 1. Si les dérivées $f', f'', \dots, f^{(p)}$ existent et si $f^{(p)}$ est continue sur I , on dit que f est de classe C^p sur I . On dit que f est de classe C^∞ sur I si toutes les dérivées $f^{(n)}$ existent et sont continues sur I .

Propriété 1.5. Si f et g sont des fonctions de classe C^p , il en va de même de la somme $f+g$, du produit fg et (s'il existe) de la composée $f \circ g$.

Propriété 1.6 (Formule de Leibnitz). Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables en x_0 , alors:

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{p=0}^n C_n^p f^{(n-p)}(x_0) g^{(p)}(x_0).$$

1.7 Extremums

Définition 1.5. Soit f une fonction définie sur $I =]a, b[$. On dit que f possède un maximum (resp. un minimum) local (ou relatif) en un point $x_0 \in I$ s'il existe un voisinage, $\mathcal{V}(x_0) \subset I$, de x_0 tel que $f(x_0) \geq f(x)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$) pour tout $x \in \mathcal{V}(x_0)$.

Propriété 1.7. Soit f une fonction dérivable sur $I =]a, b[$. Si f admet un extremum local en un point $x_0 \in I$ alors $f'(x_0) = 0$.

1.7.1 Méthode de la dérivée seconde

1. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$. 2. Pour une valeur critique $f'(a) = 0$: f admet un maximum si $f''(a) < 0$. f admet un minimum si $f''(a) > 0$.

1.8 Règles de de l' Hospital

Les règles de de l' Hospital sont très utiles pour calculer les limites qui se présentent sous les formes indéterminées de type: $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$.

1.9 Fonctions convexes

Définition 1.6. Une fonction f définie sur un intervalle I est dite Convexe si pour tous $x_0, x_1 \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1) \leq \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(x_1).$$

Définition 1.7. Concave si pour tous $x_0, x_1 \in I$ et $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1) \geq \lambda f(x_0) + (1 - \lambda)f(x_1).$$

Propriété 1.8. Si f est une fonction continue deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I . Alors - f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$. - f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

1.10 Plan d'étude d'une fonction

Les étapes à suivre pour étudier une fonction f sont, en général: 1. Domaine de définition de f , noté D_f . 2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D_f . 3. Symétrie du graphe C_f de f ; domaine d'étude. 4. Limites aux bornes du D_f . 5. Etude des branches infinies, détermination des asymptotes. 6. Tableau de variation. 7. Tracer le graphe.