

# Suites de Fonctions

## 1 Convergence simple et convergence uniforme

### 1.1 Définitions de convergence

**Définition 1.1** (Convergence simple). Soient  $E$  un ensemble et  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $(f_n)$  **converge simplement** sur  $E$  si et seulement si, pour tout  $x \in E$ , la suite numérique  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge.

Dans ce cas on définit une nouvelle fonction  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  en posant, pour tout  $x \in E$  :

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

et on dit que  $(f_n)$  converge simplement sur  $E$  vers  $f$ .

**Remarque.**  $(f_n)$  converge simplement sur  $E$  vers  $f$  si et seulement si :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ (qui dépend de } x \text{ et } \varepsilon) \text{ tel que } |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq N.$$

**Exemple.** Soit  $E = [0, 1]$ ,  $f_n(x) = x^n$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  pour  $0 \leq x < 1$ , et  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1$ .

Donc  $x^n$  converge simplement sur  $[0, 1]$  vers la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \in [0, 1[, \\ 1 & \text{pour } x = 1. \end{cases}$$

Remarquons que, dans cet exemple, les fonctions  $f_n(x) = x^n$  sont continues, mais la limite  $f$  ne l'est pas.

### 1.2 Convergence uniforme

**Définition 1.2** (Convergence uniforme). Soient  $E$  un ensemble,  $A$  une partie de  $E$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et  $f$  une fonction sur  $E$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On dit que  $(f_n)$  **converge uniformément** vers  $f$  sur  $A$  si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

**Remarque.** – La différence principale entre la convergence simple et la convergence uniforme est que, dans la formulation de la convergence uniforme, le nombre  $N$  ne dépend pas de la variable  $x$ , tandis que dans la formulation de la convergence simple,  $N$  peut dépendre de  $x$ .

– En pratique, on commence par déterminer la limite simple  $f$ , et on étudie l'écart  $|f_n - f|$  sur  $A$  en le majorant par une suite qui tend vers 0.

**Exemple.** Reprenons l'exemple précédent :  $E = [0, 1]$ ,  $f_n(x) = x^n$ ,  $f(x) = 0$  pour  $x \in [0, 1[$  et  $f(1) = 1$ .

1) Montrons que  $f_n$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $[0, 1[$ .

Prenons  $t_n = 2^{-1/n}$  ( $n \geq 1$ ) ; on a  $t_n \in [0, 1[$  et :

$$f_n(t_n) - f(t_n) = (2^{-1/n})^n = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, \sup_{x \in [0, 1[} |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}.$$

2) Pour les mêmes fonctions, prenons maintenant  $A = [0, a]$  avec  $0 < a < 1$  et montrons que  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $A$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{0 \leq x \leq a} |x^n| = a^n.$$

Comme la suite  $a^n$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ , la convergence est uniforme.

**Proposition 1.1.** Soient  $E$  un ensemble,  $(f_n)$  une suite de fonctions sur  $E$  et  $f$  une fonction sur  $E$ . Si  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $E$ , alors  $f_n$  converge simplement vers  $f$  sur  $E$ .

## 2 Théorèmes fondamentaux sur les suites de fonctions

### 2.1 Continuité

**Théorème 2.1** (Continuité de la limite uniforme). Soient  $I$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ , et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  convergeant uniformément sur  $I$  vers une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si de plus les  $f_n$  sont continues en  $x_0$ , alors  $f$  est continue en  $x_0$ .

*Démonstration.* <https://keepmath.com>

Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$  pour tout  $n \geq N$ .

$f_N$  étant continue en  $x_0$ , il vient :

$$\exists \eta > 0 : x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[ \cap I \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Il vient alors :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Donc  $f$  est continue en  $x_0$ . □

**Corollaire 2.1.** Soient  $I$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$  et  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  convergeant uniformément sur  $I$  vers une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Si les  $f_n$  sont continues sur  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .

**Remarque.** On utilise assez fréquemment la contraposée de cette proposition pour montrer qu'une suite de fonctions continues sur  $I$  ne converge pas uniformément sur  $I$ .

Par exemple, on montre que la limite simple n'est pas continue.

### 2.2 Intégration

**Théorème 2.2** (Intégration terme à terme). Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions intégrables de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[a, b]$  vers une fonction  $f$ , alors  $f$  est intégrable et on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

## 2.3 Dérivation

**Théorème 2.3** (Dérivation terme à terme). Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $(f_n)$  une suite d'applications continûment dérivables  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

On suppose :

- 1)  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$  vers  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ .
- 2)  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $I$  (ou il existe  $x_0 \in I$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = l \in \mathbb{R}$ ).

On définit  $f(x) = l + \int_{x_0}^x g(t) dt$ .

Alors  $(f_n)$  converge simplement sur  $I$  vers  $f$  et  $f' = g$ .

## 3 Exercices

- 1) On étudie les suites de fonctions réelles définies par :

$$f_n(x) = \frac{x + \arctan(x)}{x + n} \quad \text{et} \quad g_n(x) = \frac{nx}{1 + nx}$$

pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) Ces suites convergent-elles simplement sur  $[0, 1]$  ?
- 2) Convergent-elles uniformément sur  $[0, 1]$  ? Sur  $]0, 1]$  ? Convergent-elles uniformément sur  $[1/2, 1]$  ?
- 3) Convergent-elles simplement et uniformément sur  $[1, +\infty[$  ?

<https://keepmath.com>

- 2) On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $f_n : [0, +\infty[ \rightarrow [0, 1]$  définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + x^n}.$$

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $[0, +\infty[$ .

- 3) Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par :

$$f_n(x) = \frac{1 + 2nx^2}{1 + nx^2}.$$

- 1) Étudier la convergence simple de cette suite de fonctions sur  $[0, 1]$ .

2) Calculer  $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ .

- 3) En déduire que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0, 1]$ .

1. a) Convergence simple :

$$f_n(x) = \frac{x + \arctan(x)}{x + n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$
$$g_n(x) = \frac{nx}{1 + nx} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- b) Convergence uniforme sur  $[0, 1]$  :  $f_n$  converge uniformément vers 0 sur  $[0, 1]$  car :

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - 0| \leq \frac{1 + \pi/2}{n} \rightarrow 0.$$

$g_n$  ne converge pas uniformément sur  $[0, 1]$  car la limite n'est pas continue en 0.

Sur  $[1/2, 1]$  :  $g_n$  converge uniformément vers 1 car :

$$\sup_{x \in [1/2, 1]} |g_n(x) - 1| = \sup_{x \in [1/2, 1]} \frac{1}{1 + nx} \leq \frac{1}{1 + n/2} \rightarrow 0.$$

c) Sur  $[1, +\infty[$  :  $f_n$  converge uniformément vers 0,  $g_n$  converge uniformément vers 1.

2. Pour  $f_n(x) = \frac{1}{1 + x^n}$  sur  $[0, +\infty[$  :

Pour  $x \in [0, 1[$ ,  $f_n(x) \rightarrow 1$ .

Pour  $x = 1$ ,  $f_n(1) = \frac{1}{2}$ .

Pour  $x > 1$ ,  $f_n(x) \rightarrow 0$ .

Donc la limite simple est :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

La convergence n'est pas uniforme sur  $[0, +\infty[$  car  $f$  n'est pas continue.

3.  $f_n(x) = \frac{1 + 2nx^2}{1 + nx^2}$ .

Limite simple : pour  $x = 0$ ,  $f_n(0) = 1$ . Pour  $x > 0$ ,  $f_n(x) \rightarrow 2$ .

Donc  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0, \\ 2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$  <https://keepmath.com>

$$I_n = \int_0^1 \frac{1 + 2nx^2}{1 + nx^2} dx = \int_0^1 \left( 2 - \frac{1}{1 + nx^2} \right) dx = 2 - \frac{1}{\sqrt{n}} \arctan(\sqrt{n}).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 2 - 0 = 2.$$

Mais  $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 2 dx = 2$  (car l'intégrale ne voit pas le point  $x = 0$ ).

La suite n'est pas uniformément convergente sur  $[0, 1]$  car si elle l'était, on aurait  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx =$

$\int_0^1 f(x) dx$ , ce qui est vrai ici. En réalité, il faut regarder le comportement en 0 :

$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$ , donc pas de convergence uniforme.