

1 Fonctions Usuelles

1.1 Fonctions puissances

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $x \mapsto x^n$. La fonction f est continue dérivable sur $\mathbb{R}$, paire si n est pair et impaire si n est impair. Il suffit alors d'étudier f sur $\mathbb{R}^+$. On a $f'(x) = nx^{n-1}$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$. Sa fonction réciproque f^{-1} , appelée racine n -ième définie par :

$$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ dérivable pour $x > 0$ de dérivée :

$$(\sqrt[n]{x})' = (x^{\frac{1}{n}})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

1.2 Fonction logarithme népérien

Définition 1.1. On appelle fonction logarithme népérien, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée $\ln$, telle que: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$.

Propriété 1.1. La fonction $\ln$ vérifie les propriétés suivantes: Pour tous $a > 0, b > 0$ et $r \in \mathbb{Q}$ on a: 1. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. 2. $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$. 3. $\ln(a^r) = r \ln a$.

Il résulte de sa définition que la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc continue. De plus sa dérivée est strictement positive donc elle est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$.

<https://keepmath.com>

1.3 Fonctions exponentielles

La fonction logarithme népérien est une bijection de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque, notée $\exp$, définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0, +\infty[$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, y = \exp(x) \iff x = \ln y$. Par convention, $\exp(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Propriété 1.2. La fonction exponentielle est continue, dérivable, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$.

1.4 Fonction logarithme de base a

Définition 1.2. Soit a un nombre réel tel que $a > 0$ et $a \neq 1$. On appelle fonction logarithme de base a , notée $\log_a$, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

1.5 Fonctions exponentielles de base a

Si $a > 0$ et $a \neq 1$. La fonction $\log_a$ est continue strictement monotone donc bijective de $]0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque appelée fonction exponentielle de base a , notée $\exp_a$, est définie sur $\mathbb{R}$ et caractérisée par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp_a x = a^x = e^{x \ln a}$$

1.6 Fonctions hyperboliques

Définition 1.3. Les fonctions hyperboliques sont :

- Cosinus hyperbolique, notée ch , définie sur $\mathbb{R}$ par: $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- Sinus hyperbolique, notée sh , définie sur $\mathbb{R}$ par: $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
- Tangente hyperbolique, notée th , définie sur $\mathbb{R}$ par: $thx = \frac{shx}{chx}$.
- Cotangente hyperbolique, notée $coth$, définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $cothx = \frac{1}{thx}$.

1.7 Fonctions hyperboliques réciproques

- $\argchx = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ si $x \geq 1$
- $\argshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ si $x \in \mathbb{R}$
- $\argthx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ si $|x| < 1$
- $\argcothx = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ si $|x| > 1$

1.8 Fonctions circulaires

A tout nombre réel $\theta \in [0, 2\pi[$ on peut associer un unique point M du cercle U centré à l'origine et de rayon 1.

- On appelle $\cos \theta$ l'abscisse de M.
- On appelle $\sin \theta$ l'ordonnée de M.
- $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
- $\cotg \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

1.9 Etude des fonctions circulaires

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$, continues et dérivables. La fonction tangente est définie pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. La fonction cotangente est définie pour $x \neq k\pi$.

1.10 Fonctions circulaires réciproques

- Fonction Arc cosinus: $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
- Fonction Arc sinus: $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- Fonction Arc tangente: $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
- Fonction Arc cotangente: $\operatorname{arccotg} : \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$