

Séries de Fonctions

1 Convergence simple et convergence uniforme

Soient E un ensemble et (u_n) une suite de fonctions sur E . On veut définir la somme infinie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

$$\text{Posons } S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

Définition 1.1 (Convergence simple d'une série de fonctions). Soit A une partie de E . On dit que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ **converge simplement** (resp. **uniformément**) sur A si et seulement si la suite associée de fonctions $(S_n(x))$, où $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$, converge simplement (resp. **uniformément**) vers une fonction $S(x)$ sur A .

Dans ce cas on écrit :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \quad (\forall x \in A).$$

Lemme 1.1. 1) Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ une série simplement convergente de fonctions sur E . Notons

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k = S(x) - S_n(x) \text{ le reste d'ordre } n \text{ de la série. Alors :}$$

<https://keepmath.com>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \forall x \in E.$$

2) La série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $A \subset E$ si et seulement si la suite de fonctions (R_n) converge uniformément vers 0 sur A .

1.1 Convergence normale

Définition 1.2 (Convergence normale). La série $\sum f_n$ est dite **normalement convergente** sur A s'il existe une série convergente $\sum v_n < +\infty$ à termes dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x \in A} |f_n(x)| \leq v_n.$$

Proposition 1.1. Soit $\sum f_n$ normalement convergente sur A . Alors $\sum f_n$ est absolument uniformément convergente sur A et donc uniformément convergente sur A .

Démonstration.

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*$,

$$\sup_{a \in A} \sum_{k=1}^p |f_{n+k}(x)| \leq \sum_{k=1}^p \sup_{x \in A} |f_{n+k}(x)| \leq \sum_{k=1}^p v_{n+k}.$$

Puisque $\sum v_n$ vérifie le critère de Cauchy, on applique la proposition uniforme de Cauchy.

□

Remarque. En pratique, on essaie d'abord de prouver la convergence normale. Pour cela, on cherche un majorant v_n de $\|f_n\|_\infty$ tel que la série numérique $\sum v_n$ converge.

Lorsqu'il n'y a pas convergence normale mais convergence simple de la série de fonctions, l'écart $S_n(x) - S(x)$ est égal à $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Pour établir la convergence uniforme de la série de fonctions, il faut montrer que la suite $(\|R_n\|_\infty)$ tend vers 0.

2 Théorèmes fondamentaux sur les séries de fonctions

2.1 Continuité

Théorème 2.1 (Continuité de la somme d'une série de fonctions). Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, et $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément sur I vers une fonction $S : I \rightarrow \mathbb{R}$.

1) Si toutes les fonctions f_n sont continues en x_0 , alors S est continue en x_0 .

2) Si toutes les fonctions f_n sont continues sur I , alors S est continue sur I .

Exemple. Pour $x > 0$, on pose :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + n^2 x}.$$

1) Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $x \in]0; +\infty[$. On a $f_n(x) \sim \frac{1}{n^2 x}$, donc $\sum f_n(x)$ converge absolument.

2) Montrer que S est continue.

Les f_n sont continues sur $]0; +\infty[$. Soit $a > 0$,

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n + n^2 a} \sim \frac{1}{n^2}.$$

Donc la série $\sum f_n(x)$ est normalement convergente sur $[a; +\infty[$, donc uniformément convergente sur tout segment de $]0; +\infty[$. On peut donc conclure que S est continue.

3) Étudier la monotonie de S .

S est décroissante car chaque f_n est décroissante.

4) Déterminer la limite en $+\infty$ de S .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + n^2 x} = 0.$$

2.2 Intégration

Théorème 2.2 (Intégration terme à terme d'une série de fonctions). Soient $[a, b]$, $a < b$, un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions intégrables bornées de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$, alors S est intégrable sur $[a, b]$ et on a :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Exemple. Soit $\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right)$.

Justifier et calculer $\int_0^1 \psi(x) dx$.

On a :

$$\psi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

Or pour $x \in [0, 1]$, $\left| \frac{2x}{n^2 - x^2} \right| \leq \frac{2}{n^2 - 1}$, donc la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$ est normalement convergente.

D'après le théorème précédent, on peut permuter l'intégrale et la somme :

$$\int_0^1 \psi(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{n-x} dx - \int_0^1 \frac{1}{n+x} dx \right).$$

Donc :

$$\sum_{n=2}^N \left(\int_0^1 \frac{1}{n-x} dx - \int_0^1 \frac{1}{n+x} dx \right) = \sum_{n=2}^N \left(\ln \left(\frac{n}{n-1} \right) - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \right) = \ln N - \ln(N+1) + \ln 2.$$

Ainsi :

$$\int_0^1 \psi(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} (\ln N - \ln(N+1) + \ln 2) = \ln 2.$$

2.3 Dérivation

<https://keepmath.com>

Théorème 2.3 (Dérivation terme à terme d'une série de fonctions). Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions continûment dérivables $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On suppose :

- 1) $\sum f'_n$ converge uniformément sur I vers $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- 2) Il existe $x_0 \in I$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ soit convergente.

Alors l'application $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est dérivable et on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t).$$

Exemple. Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \sin(nx)$.

- 1) Montrer que f est de classe C^1 sur $] -1, 1[$.

Pour $x \in] -1, 1[$, $|f_n(x)| \leq |x|^n$. La série géométrique de terme général $|x|^n$ converge, donc f est définie sur $] -1, 1[$.

Soit $a \in]0, 1[$. Chaque f_n est de classe C^1 sur $[-a, a]$ et pour $x \in [-a, a]$:

$$f'_n(x) = x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx).$$

Pour $x \in [-a, a]$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|f'_n(x)| \leq a^{n-1} + a^n \leq 2a^{n-1}.$$

Puisque la série numérique de terme général $2a^{n-1}$ converge, la série de fonctions de terme général f'_n est normalement convergente sur $[-a, a]$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $[-a, a]$ pour tout $a \in]0, 1[$ et donc sur $] -1, 1[$.

2) Calculer $f'(x)$.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (x^{n-1} \sin(nx) + x^n \cos(nx)).$$

3 Exercices

1) Étudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants :

1) $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$, sur $[0, +\infty[$, puis sur $]1, +\infty[$, puis sur $[2, +\infty[$.

2) $f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$, sur $[0, +\infty[$ puis sur $[0, 50]$.

3) $f_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$ sur $[0, +\infty[$.

<https://keepmath.com>

2) On considère la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ avec $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

1) Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Montrer que sa somme $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est une fonction continue.

3) Montrer que $\int_0^\pi f(x) dx = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

4) Montrer que $f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

3) On considère la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{\sin(2x)}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{m^4}.$$

1) Montrer que cette fonction est bien définie, c'est-à-dire que la série converge simplement sur $[0, \pi]$.

2) Converge-t-elle uniformément ?

4) On considère la série de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ de terme général :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-nx}}{\sqrt{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- 1) Montrer que pour tout $a > 0$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, mais pas sur $[0, +\infty[$.
- 2) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
- 3) Montrer que la somme de cette série est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$.

1. a) $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$.

Sur $[0, +\infty[$: convergence simple vers $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$

Pas de convergence normale car $\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| = 1$.

Sur $]1, +\infty[$: convergence normale car $\sup_{x \in]1, +\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{2}$.

Sur $[2, +\infty[$: convergence normale car $\sup_{x \in [2, +\infty[} |f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$.

b) $f_n(x) = \frac{x}{n^2 + x^2}$.

Sur $[0, +\infty[$: $\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{2n}$, donc pas de convergence normale.

Sur $[0, 50]$: $\sup_{x \in [0, 50]} |f_n(x)| \leq \frac{50}{n^2}$, donc convergence normale.

c) Même qu'en b). <https://keepmath.com>

2. a) $|f_n(x)| = \left| \frac{\sin(nx)}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$. Donc la série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Comme la série converge normalement, la somme est continue.

c) $\int_0^\pi f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^4} = 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

d) $|f'_n(x)| = \left| \frac{\cos(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, donc la série des dérivées converge normalement. On peut dériver terme à terme.

3. $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{|\sin(mx)|}{m^4} \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4} < +\infty$, donc convergence normale sur $[0, \pi]$.

4. a) $|u_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n+1}}$.

Sur $[a, +\infty[$: $\sup_{x \in [a, +\infty[} |u_n(x)| = \frac{e^{-na}}{\sqrt{n+1}}$, série convergente.

Sur $[0, +\infty[$: $\sup_{x \in [0, +\infty[} |u_n(x)| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, série divergente.

b) Convergence uniforme sur $[0, +\infty[$ par le critère des séries alternées.

c) La série des dérivées converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc la somme est dérivable sur $]0, +\infty[$.