

1 Formules de Taylor et Développements Limités

1.1 Fonctions équivalentes

Définition 1.1. Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 , (x_0 fini ou non). On dit que la fonction f est un infiniment petit au voisinage de x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Exemple 1.1. On dispose d'une gamme d'infiniment petits particulièrement simple quand x tend vers 0, à savoir $x, x^2, \dots, x^n, \dots$. La fonction x^n tend vers 0 d'autant plus vite que n est plus grand.

Définition 1.2. Soit f une fonction définie sur un voisinage de x_0 , (x_0 fini ou non). On dit que la fonction f est un infiniment grand au voisinage de x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty.$$

Exemple 1.2. La fonction $1/x$ est un infiniment grand au voisinage de 0.

Définition 1.3. Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0 , (x_0 fini ou non). On dit que les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 , s'il existe une fonction h définie sur un voisinage de x_0 telle que :

$$f(x) = g(x)h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 1, \quad \text{on écrit } f \sim_{x_0} g.$$

Remarque 1.1. Si g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0 , la relation $f \sim_{x_0} g$ est équivalente à la propriété : $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 1 quand x tend vers x_0 .

Exemple 1.3. Soit P le polynôme de degré n donné par :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

avec $a_n \neq 0$. On a : $P(x) \sim_{+\infty} a_n x^n$. En effet :

$$P(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n} \right) = a_n x^n h(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1.$$

Définition 1.4. Si $f(x) \sim_0 a x^n$, on dit que $a x^n$ est la partie principale de $f(x)$, et que $f(x)$ est un infiniment petit d'ordre n .

Exemple 1.4. Nous avons les équivalences suivantes :

$$\sin x \sim_0 x, \quad \ln(1+x) \sim_0 x, \quad 1 - \cos x \sim_0 \frac{x^2}{2}.$$

Exemple 1.5. Quand x tend vers 0, $\sin x$ est un infiniment petit de partie principale x , d'ordre 1.

Exemple 1.6. Quand x tend vers 0, la fonction $1 - \cos x$ est un infiniment petit de partie principale $\frac{x^2}{2}$, d'ordre 2.

Exemple 1.7. Quand x tend vers 0, x^3 est un infiniment petit d'ordre 3, de partie principale x^3 . La relation $f \sim_{x_0} g$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble des fonctions.

Propriété 1.1. Si f tend vers une limite l en x_0 , (l finie ou non) et si $f \sim_{x_0} g$ alors g tend vers l en x_0 .

Propriété 1.2. Si $f_1 \sim_{x_0} f_2$ et $g_1 \sim_{x_0} g_2$ alors $f_1 g_1 \sim_{x_0} f_2 g_2$ et $\frac{f_1}{g_1} \sim_{x_0} \frac{f_2}{g_2}$.

Exemple 1.8. Calculer la limite, quand x tend vers 0, de :

$$f(x) = \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^2 \ln(1+x)}.$$

On sait que : $1 - \cos x \sim_0 \frac{1}{2}x^2$, $\sin x \sim_0 x$ et $\ln(1+x) \sim_0 x$. D'après la proposition précédente,

$$f(x) \sim_0 \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^3} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{2}.$$

Exemple 1.9. Trouver la limite, quand x tend vers $+\infty$, de :

$$f(x) = \frac{e^{2x} + x^2}{e^x + x^3}.$$

On a : $e^{2x} + x^2 \sim_{+\infty} e^{2x}$ car

$$\frac{e^{2x} + x^2}{e^{2x}} = 1 + \frac{x^2}{e^{2x}}$$

tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, nous avons aussi $e^x + x^3 \sim_{+\infty} e^x$, d'où

$$f(x) \sim_{+\infty} \frac{e^{2x}}{e^x} = e^x \quad \text{par suite} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Remarque 1.2. Erreur à éviter : Si $f \sim_{x_0} f_1$ et $g \sim_{x_0} g_1$ on n'a pas en général : $f + g \sim_{x_0} f_1 + g_1$, ni $f - g \sim_{x_0} f_1 - g_1$.

Exemple 1.10.

$$\frac{x + x^2}{x} \sim_0 \frac{x + x^3}{x} \\ x \sim_0 x$$

, mais $(x + x^2) - (x)$ n'est pas équivalente à $(x + x^3) - (x)$ au voisinage de 0.

Exemple 1.11.

$$\cos x \sim_0 1$$

$$1 \sim_0 1$$

, mais $(1 - \cos(x))$ n'est pas équivalente à $1 - 1 = 0$ au voisinage de 0.

Exemple 1.12. Si $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = -x^2 + x + 1$ on a : $f(x) \sim_{+\infty} f_1(x) = x^2$ et $g(x) \sim_{+\infty} g_1(x) = -x^2$. Mais $f(x) + g(x) = x + 2$ et $f_1(x) + g_1(x) = 0$. On ne peut pas non plus composer des équivalents : ainsi on a par exemple

$$(x + x^2) \sim_{+\infty} x^2$$

mais

$$\frac{e^{x+x^2}}{e^{x^2}} = e^x$$

tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

1.2 Formules de Taylor

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, (dérivable autant de fois que nécessaire) sur l'intervalle I , a un point de I et m un entier. La formule de Taylor à l'ordre m permet d'approcher $f(x)$, pour x voisin de a , par une expression ne dépendant que de $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{(m)}(a)$ et de x (et donc pas de $f(x)$.) Par exemple pour une fonction f dérivable la formule des Accroissements Finis permet d'approcher f par un polynôme de degré 1.

Théorème 1.1 (Formule de Taylor-Lagrange). *Soit f une fonction de classe C^{n-1} sur $[a, b]$. On suppose que $f^{(n)}$ existe sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

Cette formule est appelée formule de Taylor d'ordre $n - 1$. Le dernier terme est appelé reste ou reste de Lagrange.

Preuve : Considérons la fonction g définie sur $[a, b]$ par :

$$g(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \cdots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!} M$$

où M est une constante telle que $g(a) = 0$. Puisque f est de classe C^{n-1} , alors g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus $g(a) = g(b) = 0$, donc on peut appliquer le théorème de Rolle à g : il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$. On a :

$$g'(x) = -(b-x)f''(x) + \cdots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} M.$$

Après simplifications, on trouve : <https://keepmath.com>

$$g'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} [M - f^{(n)}(x)].$$

Or ; $g'(c) = 0$ donc $M = f^{(n)}(c)$. En outre, $g(a) = 0$ d'où le résultat.

Remarque 1.3. *Le théorème reste vrai même si $b < a$. En effet, la démonstration précédente ne fait intervenir aucune des conditions $b < a$ ou $b > a$. De plus, on a : $g(a) = g(b) = 0$.*

Remarque 1.4. *Le nombre c est souvent désigné par $a + \theta(b-a)$ avec $0 < \theta < 1$.*

Comme conséquence immédiat du théorème ci-dessus on a la formule de Taylor Mac-Laurin :

Théorème 1.2 (Formule de Taylor-Mac-Laurin). *Soit f une fonction de classe C^{n-1} sur $[0, x]$. On suppose que $f^{(n)}$ existe sur $]0, x[$. Alors il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

Preuve : On applique le théorème ci dessus avec $a = 0$ et $b = x$.

Remarque 1.5. *Si on prend $b = a + h$ ($h < 0$ ou $h > 0$), on aura :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h).$$

Exemple 1.13. *Soit $f(x) = e^x$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} e^{\theta x}, \quad 0 < \theta < 1.$$

La formule de Taylor est applicable aux polynômes de degré n . Ils sont infiniment dérivables et la dérivée d'ordre $n + 1$ est identiquement nulle. On peut remarquer que si :

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \Rightarrow p(0) = a_0 \\ p'(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \dots + na_nx^{n-1} \Rightarrow p'(0) = a_1 \\ p''(x) &= 2a_2 + 3 \times 2a_3x \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} \Rightarrow p''(0) = 2!a_2 \\ p'''(x) &= 3 \times 2 \times 1a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} \Rightarrow p'''(0) = 3!a_3 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

On a donc bien :

$$p(x) = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Théorème 1.3 (Formule de Taylor-Young). Soit f une fonction de classe C^n sur un voisinage I de x_0 . Alors pour tout $x \in I$ on a :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n\epsilon(x),$$

où ϵ une fonction définie sur I telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$.

Preuve : Appliquons la formule de Taylor d'ordre n à la fonction f sur $[x_0, x]$ (on suppose $x_0 < x$). Alors, il existe $c_x \in]x_0, x[$, tel que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(c_x) \\ &= \sum_{p=0}^n \frac{(x-x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + (x-x_0)^n \epsilon(x). \end{aligned}$$

avec : $c_x = x_0 + \theta(x-x_0)$, $0 < \theta < 1$ et $\epsilon(x) = \frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}$. On a bien : $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow x_0} f^{(n)}(c_x) = f^{(n)}(x_0)$.

Remarque 1.6. Puisque $\epsilon(x)$ tend vers 0 en x_0 , $f(x)$ est équivalente au voisinage de x_0 au polynôme en x suivant

$$f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0).$$

Remarque 1.7. Si on pose $x_0 = 0$ dans la formule de Taylor-Young on obtient la formule de Mac-Laurin-Young.

Exemple 1.14.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x).$$

Remarque 1.8. La différence essentielle entre les formules est que la formule de Taylor-Young est d'utilisation locale (c'est à dire pour h petit) alors que la formule de Taylor-Lagrange est utilisable sur le segment $[a, a+h]$ même si h n'est pas petit.

Exercice 1.1. Montrer que pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x+1}} \leq (x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}} \leq \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{8\sqrt{x}}$$

Corrigé : Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$. Il s'agit d'encadrer la différence $f(x+1) - f(x)$ et pour cela nous écrivons une formule de Taylor au point x . Pour tout nombre $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ et $f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{x}}$. La dérivée seconde f'' est continue sur $]0, +\infty[$ donc f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$. Si a et b appartiennent à l'intervalle $]0, +\infty[$, la formule de Taylor à l'ordre 2 au point a s'écrit :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(\theta)$$

où θ est un nombre entre a et b . Soit x un nombre strictement positif. Appliquons cette formule en prenant $a = x$ et $b = x+1$, nombres qui sont bien tous deux strictement positifs : il existe un nombre θ compris entre x et $x+1$ tel que

$$f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(x) + \frac{(x+1-x)^2}{2}f''(\theta) = f'(x) + \frac{f''(\theta)}{2}.$$

Comme la fonction f'' est décroissante, on a $f''(x+1) \leq f''(\theta) \leq f''(x)$ donc

$$f'(x) + \frac{f''(x+1)}{2} \leq f(x+1) - f(x) \leq f'(x) + \frac{f''(x)}{2}.$$

Ce sont les inégalités qu'il faut démontrer.

1.3 Applications de la formule de Taylor

1.3.1 Calcul approché des valeurs d'une fonction

Si une fonction f vérifie sur $[x_0, x_0 + h]$ les conditions d'application de la formule de Taylor, on a :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0 + \theta h).$$

En supposant $f^{(n+1)}$ bornée sur le segment $[x_0, x_0 + h]$, on peut prendre pour valeur approchée de $f(x_0 + h)$ le nombre

$$f(x_0) + hf'(x_0) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0),$$

l'erreur commise étant majorée par :

$$\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{t \in [x_0, x_0+h]} |f^{(n+1)}(t)|.$$

1.3.2 Démonstration d'inégalités

En majorant ou en minorant le reste dans la formule de Taylor-Lagrange, on démontre des inégalités. Par exemple, pour la fonction $\cos x$, on a :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{24} \cos(\theta x), \quad \text{avec } 0 < \theta < 1.$$

Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par exemple on $0 < \cos(\theta x) \leq 1$. D'où l'on déduit pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{24}.$$

1.3.3 Ordre de multiplicité des racines d'une équation

Si la fonction f s'annule pour $x = x_0$ et s'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $f(x) = (x - x_0)^p g(x)$ avec $g(x_0) \neq 0$, on dit que x_0 est une racine d'ordre p de l'équation $f(x) = 0$. Il n'est pas toujours possible de définir l'ordre d'une racine. La proposition suivante permet en utilisant la formule de Taylor-Young de caractériser les zéros d'ordre p d'une fonction f .

Propriété 1.3. Si f est une fonction de classe C^{p-1} dans un voisinage de x_0 et admet une dérivée d'ordre p en x_0 . Alors x_0 est un zéro d'ordre p de f si et seulement si :

$$f(x_0) = f'(x_0) = \dots f^{(p-1)}(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(p)}(x_0) \neq 0.$$

Démonstration En effet d'après la formule de Taylor-Young on a :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^p}{p!} f^{(p)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^p}{p!} \epsilon(x - x_0).$$

avec $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x - x_0) = 0$. L'ordre du zéro apparaît dans ce cas comme l'ordre de la première dérivée non nulle pour $x = x_0$.

1.4 Développements limités

Définition 1.5. Soient f une fonction définie sur un voisinage de zéro, sauf peut être en 0, et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet un développement limité (D.L) d'ordre n au voisinage de zéro, s'il existe polynôme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ de degré $\leq n$, à coefficients réels, tel que :

$$f(x) = P(x) + x^n \epsilon(x)$$

où ϵ est une fonction qui tend vers 0 en 0. Le polynôme $P(x)$ est appelé partie principale du développement limité de f et $x^n \epsilon(x)$ le reste du développement limité.

Remarque 1.9.

$$f(x) \sim_0 P(x)$$

Exemple 1.15. Soit $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Pour $x \neq 1$ on a :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - x^n \frac{x}{1 - x}.$$

Par suite f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^n \epsilon(x)$$

Théorème 1.4. Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0, alors ce développement limité est unique.

Démonstration Si f admet deux développements limités d'ordre n au voisinage de 0 alors

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n \epsilon_1(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_1(x) = 0$$

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + x^n \epsilon_2(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_2(x) = 0$$

Soit k le plus petit entier tel que $a_k \neq b_k$, alors :

$$0 = (a_k - b_k)x^k + \dots + (a_n - b_n)x^n + x^n(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)).$$

Ainsi, pour $x \neq 0$, on a :

$$(a_k - b_k) + \dots + (a_n - b_n)x^{n-k} + x^{n-k}(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)) = 0.$$

D'où, si on fait tendre x vers 0, on obtient : $a_k - b_k = 0$. Ce qui est absurde. D'où le résultat.

Théorème 1.5. Si f est de classe C^n sur un voisinage de 0, alors f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 donné par :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n \epsilon(x).$$

Démonstration Il suffit d'appliquer la formule de Mac-Laurin-Young.

Remarque 1.10. La formule de Mac-Laurin-Young exige l'existence de $f^{(n)}(0)$, alors que le développement limité peut exister sans que f soit dérivable en 0. En effet ; considérons la fonction :

$$f(x) = 2 + x + x^2 + x^3 \ln |x|.$$

On voit bien que f n'est pas définie au point 0, donc elle n'est pas dérivable en ce point. Par contre :

$$f(x) = 2 + x + x^2 + x^2 \epsilon(x),$$

où $\epsilon(x) = x \ln |x|$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0$. Donc f admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de zéro.

Remarque 1.11. Si f est continue en 0 et possède un développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 alors f est dérivable en 0. Par conséquent la fonction $f(x) = |x|$ n'admet pas de développement limité d'ordre 1 au voisinage de 0 car elle est continue et n'est pas dérivable en 0.

Remarque 1.12. Si f possède un développement limité d'ordre ≥ 1 au voisinage de 0 alors f admet une limite finie en 0. Par conséquent toute fonction qui n'admet pas une limite finie en 0 n'admet pas de développement limité au voisinage de 0.

Remarque 1.13. Soit f une fonction continue en 0. Alors f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 si et seulement si la dérivée première $f'(0)$ existe. Par contre, si f est continue en 0, alors l'existence, au voisinage de 0, d'un développement limité d'ordre $n > 1$, n'entraîne pas l'existence de $f^{(n)}(0)$ ni même l'existence d'autres dérivées que $f'(0)$.

Propriété 1.4. Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Si f est paire, son développement limité ne contient que des monômes de degrés pairs. Si f est impaire, son développement limité ne contient que des monômes de degrés impairs.

Démonstration En changeant x en $-x$ dans le développement limité de f , il vient

$$f(-x) = P(-x) + (-x)^n \epsilon(-x) = P(-x) + (x)^n (-1)^n \epsilon(-x).$$

Posons $\epsilon_1(x) = (-1)^n \epsilon(-x)$. La fonction $\epsilon_1(x)$ a pour limite 0 au point 0, donc l'égalité

$$f(-x) = P(-x) + (x)^n \epsilon_1(x) \quad (**)$$

est le développement limité de la fonction $g : x \mapsto f(-x)$ à l'ordre n au point 0. Supposons que la fonction f est paire, c'est à dire que l'on a $f = g$. L'égalité $(**)$ est donc aussi le développement limité de f à l'ordre n au point 0. Puisque ce développement limité est unique, c'est que les polynômes $P(x)$ et $P(-x)$ sont égaux. Par définition, le polynôme P est pair, autrement dit tous les coefficients des monômes de degré impair sont égaux à 0.

Exercice 1.2. faites la démonstration dans le cas où f est une fonction impaire.

1.5 Développements limités usuels

En utilisant la formule de Mac-Laurin-Young, on obtient les développements limités des fonctions usuelles au voisinage de 0 :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}x + \frac{(\ln a)^2}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(\ln a)^n}{n!}x^n + x^n \epsilon(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n \epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + x^n \epsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n} \epsilon(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \epsilon(x)$$

<https://keepmath.com>

1.6 Opérations sur les développements limités

Soient f et g ayant des développements limités d'ordre n au voisinage de 0 ;

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n \epsilon_1(x) = P(x) + x^n \epsilon_1(x),$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + x^n \epsilon_2(x) = Q(x) + x^n \epsilon_2(x).$$

1.6.1 Développement limité d'une somme

La somme $f + g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 donné par :

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + x^n(\epsilon_1(x) + \epsilon_2(x)) = P(x) + Q(x) + x^n \epsilon(x).$$

1.6.2 Développement limité d'un produit

On a :

$$f(x)g(x) = P(x)Q(x) + x^n[P(x)\epsilon_2(x) + Q(x)\epsilon_1(x) + x^n\epsilon_1(x)\epsilon_2(x)].$$

Donc le produit fg possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 obtenu en supprimant du polynôme $P(x)Q(x)$ les monômes de degré $> n$.

Exemple 1.16. Déterminons le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$h(x) = \frac{\ln(x+1)}{1-x}.$$

Posons : $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = \frac{1}{1-x}$. On a :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x) \quad \text{et}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\epsilon(x).$$

Donc :

$$\frac{\ln(x+1)}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^3}{6} + x^3\epsilon(x).$$

Exemple 1.17. Déterminons le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de

$$f(x) = [\ln(x+1)]^2.$$

On a : $\ln(1+x) = x \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^2\epsilon(x)\right)$. Donc

$$\begin{aligned} [\ln(x+1)]^2 &= x^2 \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + x^2\epsilon(x)\right)^2 \\ &= x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + x^4\epsilon(x). \end{aligned}$$

1.6.3 Développement limité d'un quotient

Rappelons le résultat suivant (division des polynômes suivant les puissances croissantes.) Soient A et B des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ et soit n un entier naturel. Si $B(0) \neq 0$, il existe un unique polynôme tel que

$$A - BQ \text{ est divisible par } X^{n+1}$$

$$Q = 0 \text{ ou } \deg Q \leq n.$$

Le polynôme Q est le quotient à l'ordre n de la division de A par B selon les puissances croissantes. Pour calculer Q, on écrit les polynômes A et B dans l'ordre croissant des puissances de X et l'on pratique la division en s'arrêtant lorsque X^{n+1} est en facteur dans le reste.

Proposition 1.1. Soient f et g des fonctions ayant pour développement limité à l'ordre n au point 0

$$f(x) = A(x) + x^n\epsilon_1(x) \quad \text{et} \quad g(x) = B(x) + x^n\epsilon_2(x).$$

Si le nombre $g(0) = B(0)$ est non nul, le développement limité de $\frac{f}{g}$ à l'ordre n au point 0 est

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + x^n\epsilon_3(x)$$

où Q est le quotient à l'ordre n de la division de A par B selon les puissances croissantes.

Démonstration Écrivons $A - BQ = X^{n+1}R$ où R est un polynôme. En notant $f(x) = A(x) + x^n\epsilon_1(x)$ et $g(x) = B(x) + x^n\epsilon_2(x)$, il vient

$$\begin{aligned} f(x) - g(x)Q(x) &= A(x) - B(x)Q(x) + x^n\epsilon_1(x) - x^nQ(x)\epsilon_2(x) \\ &= x^{n+1}R(x) + x^n\epsilon_1(x) - x^nQ(x)\epsilon_2(x) \\ &= x^n(xR(x) + \epsilon_1(x) - Q(x)\epsilon_2(x)). \end{aligned}$$

En divisant par g(x), on obtient $\frac{f(x)}{g(x)} - Q(x) = x^n\epsilon_3(x)$ où la fonction

$$\epsilon_3(x) = \frac{1}{g(x)}(xR(x) + \epsilon_1(x) - Q(x)\epsilon_2(x))$$

tend vers 0 d'après les théorèmes sur les limites. Puisque Q est un polynôme nul ou de degré inférieur ou égal à n, l'égalité $\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + x^n\epsilon_3(x)$ est le développement limité de $\frac{f}{g}$ à l'ordre n au point 0.

Exemple 1.18. Déterminons le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$h(x) = \frac{\ln(x+1)}{1-x}.$$

Utilisons cette fois-ci la division suivant les puissances croissantes. On retrouve alors le résultat précédent.

Exemple 1.19. Déterminons le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction :

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Au voisinage de 0, les développements limités de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ à l'ordre 5 s'écrivent :

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^5\epsilon(x) \quad \text{et} \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^5\epsilon(x)$$

La division suivant les puissances croissantes nous donne. D'où

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + x^6\epsilon(x).$$

1.6.4 Développement limité d'une composée

Si $g(0) = 0$ alors, la fonction composée, $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 obtenu en ne conservant que les monômes de degré $\leq n$ dans le polynôme $P \circ Q$. En effet :

$$(f \circ g)(x) = a_0 + a_1[g(x)] + \dots + a_n[g(x)]^n + [g(x)]^n\epsilon_1([g(x)])$$

$$g(x) = x(b_1 + b_2x + \dots + b_nx^{n-1} + x^{n-1}\epsilon_2(x)).$$

Exemple 1.20. Calculer le développement limité, à l'ordre 3 au voisinage de 0, de

$$h(x) = \sqrt{1 + \ln(1+x)}.$$

On a : $h(x) = (f \circ g)(x)$ avec $f(x) = \sqrt{1+x}$, $g(x) = \ln(1+x)$ et $g(0) = 0$. On sait que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\epsilon(x)$$

Par suite

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{1 + \ln(1+x)} \\ &= 1 + \frac{1}{2}[g(x)] - \frac{1}{8}[g(x)]^2 + \frac{1}{16}[g(x)]^3 + x^3\epsilon(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{8}\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{x^3}{16} + x^3\epsilon(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{8}x^2 + \frac{17}{48}x^3 + x^3\epsilon(x). \end{aligned}$$

Remarque 1.14. Si $g(0) = b_0 \neq 0$ on pose $g_1(x) = b_0 - g(x)$ et $f_1(x) = f(b_0 - x)$ on obtient $f_1 \circ g_1(x) = f \circ g(x)$ et $g_1(0) = 0$, il suffit alors de calculer le développement limité de $f_1 \circ g_1$.

1.6.5 Intégration d'un développement limité :

Théorème 1.6. Si f est dérivable sur un voisinage de zéro, et si f' admet un développement limité au voisinage de zéro d'ordre n de partie régulière $p(x)$. Alors la fonction f admet un développement limité d'ordre $n + 1$ au voisinage de zéro de partie régulière :

$$f(0) + \int_0^x p(t)dt.$$

Démonstration Nous avons

$$f'(x) = p(x) + x^n \epsilon(x).$$

Posons $\phi(x) = f'(x) - p(x) = x^n \epsilon(x)$. La fonction ϕ est continue, elle admet des primitives. Soit

$$\Phi(x) = f(x) - f(0) - \int_0^x p(t)dt.$$

La fonction Φ est dérivable au voisinage de 0 et d'après le théorème des Accroissements Finis il existe θ dans $]0, 1[$, tel que :

$$\Phi(x) = x\Phi'(\theta x) = x\phi(\theta x) = x^{n+1}\epsilon(\theta x) = x^{n+1}\epsilon_1(x).$$

Soit

$$f(x) = f(0) + \int_0^x p(t)dt + x^{n+1}\epsilon(x).$$

Exemple 1.21. On a :

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n+1}\epsilon(x).$$

Ainsi, le développement limité au voisinage de 0 d'ordre $2n + 1$ de $\arctan x$ est :

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + x^{2n+2}\epsilon(x).$$

Comme conséquence immédiate de ce théorème, on déduit le corollaire suivant.

1.6.6 Dérivation d'un développement limité

Corollaire 1.1. Si f est dérivable en 0 et f' admet un développement limité d'ordre $n - 1$ au voisinage de 0, alors :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + x^{n-1}\epsilon(x).$$

Remarque 1.15. 1. Toujours développer toutes les fonctions au même ordre.

2. Lorsque vous calculez un développement limité, disposez clairement les calculs de manière à ne pas oublier de termes lorsque vous ferez des sommes, des composées ou des divisions selon les puissances croissantes. Chacune de ces opérations est simple, mais il peut y en avoir plusieurs à effectuer.

3. N'écrivez pas les monômes de degré trop grand dont on sait d'après les théorèmes qu'ils n'interviendront pas dans le résultat final.

La notion du développement limité au voisinage de 0 s'étend au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque en posant $u = x - x_0$.

Définition 1.6. Soient f une fonction définie sur un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, sauf peut-être en x_0 et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de x_0 si :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \epsilon(x)$$

où a_i , $0 \leq i \leq n$, sont des nombres réels et $\epsilon(x)$ une fonction tendant vers 0 quand x tend vers x_0 .

Remarque 1.16. Si on effectue le changement de variable $u = x - x_0$, dans la définition, on obtient

$$f(x) = f(u + x_0) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \cdots + a_nu^n + o(u^n),$$

donc le développement limité de f au voisinage de x_0 se ramène au développement limité de $g(u) = f(u + x_0)$ au voisinage de 0.

Exemple 1.22. Calculer le développement limité au voisinage de 1 d'ordre n de $f(x) = e^x$. On pose $u = x - 1$ et $g(u) = f(u + 1)$ on obtient

$$g(u) = e^{u+1} = ee^u = e \left(1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \cdots + \frac{1}{n!}u^n + u^n\epsilon(u) \right),$$

donc le développement limité de e^x au voisinage de 1 est :

$$e^x = e \left(1 + (x - 1) + \frac{1}{2}(x - 1)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x - 1)^n + (x - 1)^n\epsilon(x - 1) \right).$$

Exemple 1.23. Calculer le développement limité au voisinage de 2 d'ordre 3 de $f(x) = \sqrt{x}$. On pose $u = x - 2$ et $g(u) = f(u + 2)$ on obtient :

$$g(u) = \sqrt{u + 2} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{u}{2} + 1} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{4}u - \frac{1}{32}u^2 - \frac{1}{128}u^3\epsilon(u) \right),$$

donc le développement limité de $\sqrt{x}$ au voisinage de 2 à l'ordre 3 est :

$$\sqrt{x} = \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{4}(x - 2) - \frac{1}{32}(x - 2)^2 - \frac{1}{128}(x - 2)^3 + (x - 2)^3\epsilon(x - 2) \right).$$

<https://keepmath.com>

1.6.7 Développements limités au voisinage de l'infini

Si f est définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (ou bien de la forme $] - \infty, a]$), on se ramène au voisinage de 0 en posant $u = \frac{1}{x}$. Ainsi, on dira que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de l'infini si la fonction $g(u) = f(\frac{1}{u})$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Dans ce cas le développement limité d'ordre n au voisinage de ∞ est donné par

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right),$$

$\epsilon(\frac{1}{x})$ tendant vers 0 quand x tend vers l'infini.

Exemple 1.24. Calculer le développement limité d'ordre 3 au voisinage de ∞ de

$$f(x) = \frac{x}{x - 1}.$$

On pose $u = \frac{1}{x}$ et $g(u) = f(\frac{1}{u})$, on se ramène alors au calcul du développement limité de $g(u)$ au voisinage de 0. On a

$$g(u) = \frac{1}{1 - u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^3\epsilon(u).$$

Par suite donc le développement limité de $f(x)$ au voisinage de ∞ est

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\epsilon\left(\frac{1}{x}\right)$$

1.7 Développements limités généralisés

Soit f une fonction définie dans un voisinage de zéro, sauf peut-être en 0. Si f n'admet pas de limite finie en 0 elle ne peut avoir de développement limité au voisinage de 0. Mais il peut exister un entier naturel m tel que la fonction $g(x) = x^m f(x)$ tende vers une limite finie quand $x \rightarrow 0$ et admette un développement limité au voisinage de 0 :

$$x^m f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon(x),$$

dans ce cas on a :

$$f(x) = \frac{1}{x^m} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) + x^{n-m} \epsilon(x).$$

Cette dernière expression s'appelle développement limité généralisé de f au voisinage de 0 d'ordre $n - m$.

Exemple 1.25. La fonction $f(x) = \frac{1}{x-x^2}$, n'admet pas de limite finie en 0, donc elle n'admet pas de développement limité au voisinage de 0. Mais $xf(x) = \frac{1}{1-x}$ possède un développement limité au voisinage de 0. Par exemple à l'ordre 3 on a

$$xf(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3 \epsilon(x),$$

d'où le développement limité généralisé de f au voisinage de 0 d'ordre 2 est

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + x^2 \epsilon(x).$$

1.8 Applications des développements limités

<https://keepmath.com>

1.8.1 Calculs des limites

Lorsqu'on veut calculer une limite et que les théorèmes généraux ne s'appliquent pas parce qu'on a affaire à une forme indéterminée, un développement limité permet généralement de trouver la réponse. Présentons cette technique essentielle sous forme d'exemples et d'exercices.

Exemple 1.26. Calculons la limite, quand x tend vers 0, de $f(x) = \frac{\sin x - x}{x^2(e^x - 1)}$. On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \epsilon(x), \quad e^x = 1 + x + x \epsilon(x).$$

Donc $f(x) \sim_0 \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^3}$, par suite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{6}$.

Exemple 1.27. Calculons la limite, quand x tend vers 0, de $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}$. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2 - \sin^2 x}{(x \sin x)^2} \\ &\sim_0 \frac{x^2 - \left[x - \frac{x^3}{6}\right]^2}{(x \sin x)^2} \\ &\sim_0 \frac{x^2 - \left[x^2 - \frac{x^4}{3}\right]}{(x \sin x)^2} \\ &\sim_0 \frac{\frac{x^4}{3}}{x^4} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}$.

Exemple 1.28. Calculons la limite, quand x tend vers 0, de $\frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x\cos(x)}$. On a

$$\arctan(x) - x = -\frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_1(x), \quad \text{et} \quad \sin(x) - x\cos(x) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^3\epsilon_2(x).$$

On en déduit

$$\frac{\arctan(x) - x}{\sin(x) - x\cos(x)} \rightarrow -1 \text{ lorsque } x \rightarrow 0.$$

Rappelons que pour étudier une forme indéterminée $\frac{f(x)}{g(x)}$ pour $x \rightarrow a$, on se ramènera au cas $a = 0$ en posant $x = a + u$, et en étudiant pour $u \rightarrow 0$ la quantité $\frac{f(a+u)}{g(a+u)}$. Quand on cherche $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, on se ramènera encore à une étude au voisinage de 0, en posant $x = \frac{1}{u}$, et en étudiant $\frac{f(\frac{1}{u})}{g(\frac{1}{u})}$ pour $u \rightarrow 0$, et $u > 0$.

Exemple 1.29. Calculons, si elle existe, la limite quand x tend vers $+\infty$ de

$$x \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{6}} - x^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}.$$

En utilisant la formule $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + u\epsilon(u)$ avec $\lim_{u \rightarrow 0} \epsilon(u) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} (1+x^2)^{\frac{1}{6}} - x^{\frac{1}{3}} &= x^{\frac{1}{3}} \left(\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{6}} - 1 \right) \\ &= x^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon_1(x) - 1 \right) \\ &= x^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon_1(x) \right). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{3}} &= x^{\frac{1}{3}} \left(\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 \right) \\ &= x^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\epsilon_2(x) - 1 \right) \\ &= x^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\epsilon_2(x) \right) \end{aligned}$$

où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \epsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \epsilon_2(x) = 0$. On en déduit :

$$x \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{6}} - x^{\frac{1}{3}}}{(1+x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}} = x \frac{x^{\frac{1}{3}} \left[\frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon_1(x) \right]}{x^{\frac{1}{3}} \left[\frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\epsilon_2(x) \right]} = \frac{\frac{1}{6} + \epsilon_1(x)}{\frac{1}{3} + \epsilon_2(x)}.$$

Ce qui montre que la limite existe et vaut $\frac{1}{2}$.

Exemple 1.30. Calculons, si elle existe, la limite quand x tend vers 0 de

$$(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$$

C'est une forme indéterminée de la forme 1^∞ . On écrit

$$(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \ln(\cos(x))}.$$

On est ramené à l'étude de $\frac{1}{x^2} \ln(\cos(x))$ pour $x \rightarrow 0$. C'est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Effectuons un développement limité à l'ordre 2 de $\ln(\cos(x))$ (pour $x \rightarrow 0$).

$$\ln(1+u) = u + u\epsilon_1(u)$$

$$u = \cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + x\epsilon_2(x)$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_2(x) = 0$. En composant les développements limités, on obtient :

$$\ln(\cos(x)) = \left(-\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_2(x)\right) + x^2\left(-\frac{1}{2} + \epsilon_2(x)\right) = -\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_3(x)$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_3(x) = 0$. D'où :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln(\cos(x)) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Exemple 1.31. Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln chx}{1+x\sqrt{1+x}-e^{\sin x}}$. Le numérateur et le dénominateur tendent vers 0, il convient donc de chercher leur développement limité à un ordre suffisant pour que les fonctions polynômes obtenues ne soient pas nulles. Le développement limité de $\sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 au point 0 est

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon(x).$$

Le développement limité de $\sin x$ au point 0 et à l'ordre 3 est $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$ et celui de la fonction exponentielle est $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$. En composant ces développements limités, nous obtenons :

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x).$$

Notons $D(x) = 1 + x\sqrt{1+x} - e^{\sin x}$ le dénominateur de l'expression ; il vient le développement limité à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} D(x) &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3\right) - \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) + x^3\epsilon(x). \\ &= -\frac{1}{8}x^3 + x^3\epsilon(x). \end{aligned}$$

Le premier terme non nul de la partie polynôme étant de degré 3, calculons également à l'ordre 3 le développement limité du numérateur. Pour cela il suffit de calculer le développement limité à l'ordre 2 de $\ln chx$. Nous connaissons les développements limités à l'ordre 2 :

$$chx = 1 + \frac{x^2}{2!} + x^2\epsilon(x) \quad \text{et} \quad \ln(x+1) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon(x).$$

En composant ces développements limités, ce qui est possible car $ch(0) - 1 = 0$, on trouve

$$\ln chx = \ln(1 + (chx - 1)) = \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon_1(x)$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \epsilon_1(x) = 0$. Nous avons alors

$$\frac{x \ln chx}{D(x)} = \frac{x^3 \left(\frac{1}{2} + \epsilon_1(x)\right)}{x^3 \left(-\frac{1}{8}\right) + \epsilon(x)} = \frac{\frac{1}{2} + \epsilon_1(x)}{-\frac{1}{8} + \epsilon(x)}.$$

Dans la dernière expression, le numérateur tend vers $\frac{1}{2}$ quand x tend vers 0 et le dénominateur tend vers $-\frac{1}{8}$, donc la limite cherchée est égale à -4 .

Exercice 1.3. Calculer la limite de $f(x) = \left(\frac{2x+3x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ quand x tend vers $+\infty$.

Corrigé Posons

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$$

et cherchons la limite de $g(x)$ quand x tend vers 0. Quand x tend vers 0, $\frac{2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}}{2}$ tend vers $\frac{2^0 + 3^0}{2} = 1$ et l'exposant $\frac{1}{x}$ tend vers l'infini. Nous sommes en présence d'une forme indéterminée. Rappelons que si a est un nombre réel positif, on a par définition $a^x = e^{x \ln a}$ pour tout x . Nous avons donc pour tout x

$$2^x = e^{(x \ln 2)} \quad \text{et} \quad 3^x = e^{(x \ln 3)}.$$

Pour calculer la limite de $g(x)$, prenons le logarithme

$$\ln g(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{2^x + 3^x}{2} \right) = \frac{1}{x} \ln(h(x)).$$

où $h(x) = \frac{2^x + 3^x}{2}$. Ecrivons le développement limité de la fonction h à l'ordre 1 au point 0, on a

$$e^{(x \ln 2)} = 1 + x \ln 2 + x\epsilon(x)$$

$$e^{(x \ln 3)} = 1 + x \ln 3 + x\epsilon(x)$$

donc il vient

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{2} \left[e^{(x \ln 2)} + e^{(x \ln 3)} \right] = 1 + \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} x + x\epsilon(x) \\ &= 1 + \frac{\ln 6}{2} x + x\epsilon(x) = 1 + (\ln \sqrt{6})x + x\epsilon(x). \end{aligned}$$

Puisque nous connaissons le développement limité de $\ln(x+1)$ au point 0, écrivons

<https://keepmath.com>

$$\ln h(x) = \ln(1 + (h(x) - 1)) = \ln(1 + u(x))$$

où $u(x) = h(x) - 1$ a pour limite 0 quand x tend vers 0. Or $\ln(x+1) = x + x\epsilon(x)$ et $u(x) = (\ln \sqrt{6})x + x\epsilon(x)$. En composant ces développements limités, on obtient

$$\ln h(x) = \ln(1 + u(x)) = (\ln \sqrt{6})x + x\epsilon(x).$$

Il vient $\ln g(x) = \frac{1}{x} \ln h(x) = \ln \sqrt{6} + \epsilon(x)$ c'est à dire $\lim_{x \rightarrow 0} \ln g(x) = \ln \sqrt{6}$. En composant avec la fonction exponentielle qui est continue sur $\mathbb{R}$, nous obtenons enfin

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{(\ln g(x))} = e^{\ln \sqrt{6}} = \sqrt{6}.$$

Exercice 1.4. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right)^x.$$

Où les réels a et b vérifient : $0 < a < b$.

Exercice 1.5. Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = (\cos \frac{1}{n})^{n^2}$.

Corrigé La limite se présente sous la forme indéterminée 1^∞ . En prenant le logarithme, on obtient la suite de terme général $\ln u_n = n^2 \ln \cos \frac{1}{n}$ dont nous allons calculer la limite. Le développement limité de $\cos x - 1$ à l'ordre 2 au point 0 est $\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ et celui de $\ln(1+x)$ est $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$. Nous pouvons composer ces développements limités, ce qui donne

$$\ln \cos x = \ln(1 + (\cos x - 1)) = -\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$$

où $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0$. Remplaçons x par $\frac{1}{n}$ dans cette égalité et posons $\varepsilon_n = \varepsilon(\frac{1}{n})$. Nous obtenons

$$\ln \cos \frac{1}{n} = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon_n.$$

Puisque n tend vers $+\infty$, la suite $\frac{1}{n}$ a pour limite 0, donc (propriété de la fonction ε) la suite ε_n a pour limite 0. En passant à la limite, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln u_n = -\frac{1}{2}$. Puisque la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, il vient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

1.8.2 Calcul des dérivées niemes en un point :

Pour une fonction f qui est de classe C^n , pour un certain entier $n \geq 1$, admet un développement limité à l'ordre n au point a qui s'écrit :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x).$$

Si l'on peut calculer ce développement limité, alors on déduit les valeurs des dérivées $f'(a), f''(a) \dots f^{(n)}(a)$.

Exemple 1.32. Calculer la valeur en 0 des quatres premières dérivées de $\frac{\cos x}{1+x+x^2}$. Posons $f(x) = \frac{\cos x}{1+x+x^2}$ et cherchons le développement limité de f à l'ordre 4 au point 0. Puisque le développement limité de $\cos x$ à l'ordre 4 au point 0 est $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4 \epsilon(x)$, nous devons calculer le quotient à l'ordre 4 de la division euclidienne suivant les puissances croissantes de $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ par $1 + x + x^2$. On trouve ainsi

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{23}{24}x^4 + x^4 \epsilon(x).$$

La fonction f est classe C^4 , par conséquent le développement limité de f à l'ordre 4 au point 0 est aussi

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + (x-a)^4 \epsilon(x).$$

D'après l'unicité du développement limité, on déduit des égalités ci dessus que :

$$f(0) = 1, \quad \frac{f'(0)}{1!} = -1, \quad \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{3}{2}, \quad \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{23}{24}.$$

On a donc $f'(0) = -1, f''(0) = -1, f^{(3)}(0) = 9, f^{(4)}(0) = -23$.

1.8.3 Calcul des coefficients d'une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Lorsque on décompose en éléments simple une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}[X]$, on se retrouve face au problème de calcul des coefficients réels de cette décomposition. Plusieurs techniques ont été étudiées et appliquées en algèbre. Ici on va voir comment les développements limités permettent de trouver ces constantes pour quelques fractions particulières. Illustrons ce propos sous forme d'exemples et d'exercices.

Exercice 1.6. Décomposons la fraction rationnelle $F(X) = \frac{-5X^3+2X^2-8}{X^3(X-1)}$ sur $\mathbb{R}$.

Corrigé Le théorème de décomposition sur $\mathbb{R}$ permet d'écrire

$$F(X) = \frac{A_1}{X^3} + \frac{A_2}{X^2} + \frac{A_3}{X} + \frac{A_4}{X-1}.$$

Où les quatres coefficients A_1, A_2, A_3, A_4 sont inconnues et à trouver. On peut appliquer les techniques appris en algèbre pour calculer ces coefficients, mais regardons de près ce qui se passe quand on multiplie F par X^3 .

$$X^3 F(X) = \frac{-5X^3 + 2X^2 - 8}{X - 1} = A_1 + A_2 X + A_3 X^2 + X^2 \times X F_1(X),$$

où la fraction $F_1(X) = \frac{A_4}{X-1}$ est définie au voisinage de 0. Cette dernière égalité est donc le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro de

$$\frac{-5X^3 + 2X^2 - 8}{X - 1} = \frac{8 - 2X^2 + 5X^3}{-X + 1}.$$

Donc on calcule les trois coefficients A_1, A_2 et A_3 en effectuant un développement limité de $X^3 F(X)$ en 0 à l'ordre 2, grâce à l'unicité du développement limité. On a

$$\frac{8 - 2X^2 + 5X^3}{-X + 1} = (8 - 2x^2)(1 + X + X^2) + X^2 \epsilon(X),$$

avec $\epsilon(X)$ tend vers 0 quand X tend vers 0. D'où

$$\frac{8 - 2X^2 + 5X^3}{-X + 1} = 8 + 8X + 6X^2 + X^2 \epsilon(X),$$

donc $A_1 = 8, A_2 = 8$ et $A_3 = 6$. Par suite

$$F(X) = \frac{8}{X^3} + \frac{8}{X^2} + \frac{6}{X} + \frac{-11}{X-1}.$$

Le dernier coefficient A_4 est obtenu par les méthodes habituelles.

Exercice 1.7. Soit la fraction rationnelle

$$F = \frac{(X^2 - X + 1)^2}{X^3(X-1)^3}.$$

1. Comparer $F(X)$ et $F(1-X)$. En déduire des relations entre les coefficients intervenant dans la décomposition en éléments simples de F .

2. Donner le développement limité à l'ordre 2, au voisinage de zéro, de la fonction $g(x) = \frac{(x^2-x+1)^2}{(x-1)^3}$.

3. En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle F .

Corrigé 1. La fraction admet 0 et 1 comme pôle triples. Sa décomposition en éléments simples est de la forme (voir cours d'algèbre pour plus de précisions).

$$F(X) = \frac{a_1}{X} + \frac{a_2}{X^2} + \frac{a_3}{X^3} + \frac{b_1}{X-1} + \frac{b_2}{(X-1)^2} + \frac{b_3}{(X-1)^3}.$$

De cette écriture on déduit la relation $F(1-X) = F(X)$ et l'unicité de la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle permet d'affirmer que :

$$b_1 = -a_1; \quad b_2 = a_2; \quad b_3 = -a_3.$$

2. On a

$$\begin{aligned} g(x) &= -(1 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4)(1-x)^{-3} \\ &= -(1 - 2x + 3x^2 + x^2 \epsilon(x))(1 + 3x + 6x^2 + x^2 \epsilon(x)). \end{aligned}$$

Soit

$$g(x) = -1 - x - 3x^2 + x^2 \epsilon(x).$$

3. On a $g(x) = x^3 F(x)$, donc

$$g(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3 + b_1 \frac{x^3}{x-1} + b_2 \frac{x^3}{(x-1)^2} + b_3 \frac{x^3}{(x-1)^3}.$$

Le développement limité de la fonction g à l'ordre deux en zéro s'écrit sous la forme

$$g(x) = a_1 x^2 + a_2 x + a_3.$$

De l'unicité du développement limité d'une fonction en un point, on déduit que

$$-3 = a_1; \quad -1 = a_2; \quad -1 = a_3.$$

Enfin les considérations de la question 1 donnent

$$b_1 = 3; \quad b_2 = -1; \quad b_3 = 1.$$

Finalement

$$F(X) = \frac{-3}{X} + \frac{-1}{X^2} + \frac{-1}{X^3} + \frac{3}{X-1} + \frac{-1}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X-1)^3}.$$

Exercice 1.8. 1. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \frac{x^4+x^3+1}{(1+x^2)^2}$.

2. le but de cette question est d'utiliser le résultat précédent pour déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$ de la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^4 + X^3 + 1}{X^6(1+x^2)^2}.$$

<https://keepmath.com>

a) Préciser la forme de la décomposition de F .

b) De la forme précédente déduire un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x^6 F(x)$. En déduire certains coefficients de la décomposition recherchée.

c) Achever le calcul de la décomposition.

Corrigé 1.

$$\frac{x^4 + x^3 + 1}{(1 + x^2)^2} = 1 - 2x^2 + x^3 + 4x^4 - 2x^5 + x^5 \epsilon(x),$$

où $\epsilon(x)$ tend vers zéro quand x tend vers zéro.

2. a)

$$F = \frac{a}{X^6} + \frac{b}{X^5} + \frac{c}{X^4} + \frac{d}{X^3} + \frac{e}{X^2} + \frac{f}{X} + \frac{gX+h}{X^2+1} + \frac{kX+l}{(X^2+1)^2},$$

les coefficients de la décomposition étant des réels.

b)

$$x^6 F(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + x^5 \epsilon(x),$$

en déduit $a = 1, b = 0, c = -2, d = 1, e = 4, f = -2$.

c)

$$F = \frac{1}{X^6} - \frac{2}{X^4} + \frac{1}{X^3} + \frac{4}{X^2} - \frac{2}{X} + \frac{2X-4}{X^2+1} + \frac{2X-4}{(X^2+1)^2}.$$