

1 Courbes Paramétrées

1.1 Définition

Soient f et g deux applications définies sur le même sous ensemble I de $\mathbb{R}$. Le point $M(t)$ de coordonnées $(f(t), g(t))$ décrit un sous ensemble (C) du plan lorsque t décrit I . (C) est une courbe du plan. L'application $M : t \rightarrow M(t)$ de I sur (C) est un paramétrage de la courbe (C) et les équations

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

définissent une représentation paramétrique de (C) .

1.2 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

1.2.1 Domaine de définition et dérivabilité

Le domaine de définition, noté D , sera l'intersection des domaines de définition de x et y , notés D_x et D_y respectivement. Cela définit une courbe uniquement si D est un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.

1.2.2 Réduction du domaine d'étude

Pour réduire le domaine d'étude on va étudier la périodicité de la courbe paramétrée, regarder s'il existe une isométrie qui caractérise cette courbe.

Périodicité : Soient les fonctions périodiques x et y admettant une période commune. Notons T , cette période commune positive la plus petite de x et y , on a alors $\forall t \in D$:

$$\begin{cases} x(t + T) = x(t) \\ y(t + T) = y(t) \end{cases}$$

Pour $t \in [a, a + T[$, la courbe est entièrement décrite ($a \in \mathbb{R}$ fixé).

Isométries : Les courbes paramétrées sont souvent invariantes par certaines isométries du plan. Ainsi on a :

- Symétrie par rapport à l'origine : $S(x, y) = (-x, -y)$
- Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées : $S(x, y) = (-x, y)$
- Symétrie par rapport à l'axe des abscisses : $S(x, y) = (x, -y)$
- Symétrie par rapport à la droite $y = x$: $S(x, y) = (y, x)$
- Symétrie par rapport à la droite $y = -x$: $S(x, y) = (-y, -x)$
- Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre O : $S(x, y) = (-y, x)$
- Rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre O : $S(x, y) = (y, -x)$

Plus généralement $S(x, y) = (2a - x, 2b - y)$ est la symétrie par rapport au point (a, b) .

1.2.3 Étude des variations de x et y

On construit ensuite un tableau de variations pour avoir une idée de l'allure de la courbe (C). On obtient ainsi un tableau comme ci-dessous :

t	Domaine de définition
$x'(t)$	Signe : + ou -
$x(t)$	$\nearrow$ ou $\searrow$
$y'(t)$	Signe : + ou -
$y(t)$	$\nearrow$ ou $\searrow$
C	$\nearrow$ ou $\searrow$ ou $\swarrow$ ou $\nwarrow$

Explication des variations de C :

t				
x	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
C	$\nearrow$	$\searrow$	$\swarrow$	$\nwarrow$

1.2.4 Étude des branches infinies

Les branches infinies correspondent au comportement de la courbe lorsqu'elle tend vers $\pm\infty$ quand t tend vers un t_0 fini ou non. On a alors plusieurs cas possibles :

Asymptote horizontale : Quand x tend vers ∞ et y tend vers y_0 lorsque t tend vers t_0 , alors on a une asymptote horizontale. La position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $y(t) - y_0$. Si l'expression est strictement supérieure à zéro, alors la courbe est au dessus de l'asymptote, sinon elle est en dessous. Si l'expression est nulle alors la courbe va couper l'asymptote. L'équation de l'asymptote est alors $y = y_0$.

Asymptote verticale : Quand x tend vers x_0 et y tend vers ∞ lorsque t tend vers t_0 , alors on a une asymptote verticale. La position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $x(t) - x_0$. Si l'expression est strictement supérieure à zéro, alors la courbe est à droite de l'asymptote, sinon elle est à gauche. Si l'expression est nulle alors la courbe va couper l'asymptote. L'équation de l'asymptote est alors $x = x_0$.

Asymptote oblique : Quand x tend vers ∞ et y tend vers ∞ lorsque t tend vers t_0 alors on a une asymptote oblique. Si $\frac{y(t)}{x(t)}$ possède une limite finie non nulle a et $y(t) - ax(t)$ possède une limite finie b alors la courbe admet la droite $y = ax + b$ comme asymptote oblique. La position de la courbe (C) par rapport à l'asymptote dépend du signe de $y(t) - ax(t) - b$. Si l'expression est strictement supérieure à zéro, alors la courbe est au dessus de l'asymptote, sinon elle est en dessous. Si l'expression est nulle alors la courbe va couper l'asymptote. S'il n'existe pas d'asymptote alors on peut avoir :

Direction asymptotique : Quand $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers 0 alors on a une direction asymptotique dans la direction Ox. Quand $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers ∞ alors on a une direction asymptotique dans la direction Oy.

Courbe asymptotique : Quand $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers a , $a = \tan \theta$ et $y - ax$ n'a pas de limite lorsque t tend vers t_0 , alors on a une courbe asymptotique d'angle θ .

Branche parabolique : Quand $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers a , $a = \tan \theta$ et $y - ax$ tend vers ∞ quand t tend vers t_0 , alors la courbe (C) admet une branche parabolique d'angle θ .

1.2.5 Étude des points particuliers

Il existe plusieurs types de points particuliers :

- Les points qui sont situés à l'intersection de la courbe et de l'axe Ox ou Oy. Pour les trouver on cherche les valeurs de t qui annulent x ou y .
- Les points qui sont situés à l'intersection de la courbe et d'une asymptote. On cherche les points qui annulent l'asymptote. Par exemple si on a $y = ax + b$, on cherche les points qui annulent $y - ax - b$.
- Les points stationnaires de la courbe. Pour cela on cherche les valeurs de t pour lesquelles $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$.
- Les points multiples de la courbe. Ce sont les points où la courbe se recoupe. Par exemple pour la recherche de points doubles, on cherche t_1 et t_2 tels que

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{cases}$$

Il est généralement difficile voire infaisable de calculer les points multiples. Il est plus facile de procéder par étude graphique. Pour cela nous allons continuer l'étude.

1.2.6 Étude de la convexité

Nous allons étudier la convexité de la courbe. Pour cela nous avons besoin de calculer le vecteur vitesse :

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}$$

et le vecteur accélération :

$$\begin{bmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{bmatrix}$$

Si ces deux vecteurs forment un repère direct alors la courbe est convexe, sinon elle est concave. Cependant si on parcourt la courbe de droite à gauche et non de gauche à droite, elle devient concave pour un repère direct et convexe pour un repère indirect. Pour savoir si on a un repère direct ou indirect on calcule le déterminant de :

$$\begin{vmatrix} x'(t) & x''(t) \\ y'(t) & y''(t) \end{vmatrix}$$

Si le déterminant est strictement supérieur à zéro, alors la courbe est convexe, s'il est strictement inférieur à zéro, alors la courbe est concave et si le déterminant est nul, alors on devrait avoir un point d'inflexion.

1.2.7 Traçage de la courbe

On commence par placer sur le dessin les points à tangentes verticales ou horizontales. Ensuite les points singuliers (avec leurs tangentes), les points particuliers obtenus et les branches infinies. On joint ensuite les points à l'aide du tableau de variation.

1.3 Exemple

$$C : \begin{cases} x(t) = t + \frac{1}{t^2} \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t} \end{cases}$$

Domaine de définition et dérivabilité : Les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont des sommes et composées de fonctions polynomiales C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Elles sont donc C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Réduction du domaine d'étude : En posant $t = \frac{-1}{t'}$, on obtient une nouvelle paramétrisation de la même courbe.

$$\begin{cases} x\left(\frac{-1}{t'}\right) = \frac{-1}{t'} + t'^2 = y(t') \\ y\left(\frac{-1}{t'}\right) = \frac{1}{t'^2} - t' = x(t') \end{cases}$$

Comme $t \cdot t' = -1$, le point

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

est le symétrique du point

$$\begin{bmatrix} x(t') \\ y(t') \end{bmatrix}$$

par rapport à la première bissectrice. Donc la courbe admet la première bissectrice comme axe de symétrie.

Étude des variations de x et y : On a :

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - \frac{2}{t^3} \text{ qui s'annule pour } t = \sqrt[3]{2} \\ y'(t) = 2t - \frac{1}{t^2} \text{ qui s'annule pour } t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

On obtient le tableau de variations en conséquence.

Étude des branches infinies : La courbe admet des branches infinies lorsque t tend vers $\pm\infty$ et lorsque t tend vers 0^- et 0^+ . Regardons la limite en $+\infty$ de $\frac{y(t)}{x(t)}$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} \sim \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{t} = +\infty$$

Or $x(t)$ n'a pas de limite lorsque t tend vers $+\infty$. On en déduit que la courbe admet une branche parabolique pour $t \rightarrow +\infty$. Quand t tend vers $+\infty$, $\frac{1}{t^2}$ et $\frac{-1}{t} \simeq 0$. On regarde donc la courbe :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$$

L'allure de la courbe est proche de celle d'une parabole. De même quand t est très petit on obtient une parabole couchée.

1.3.1 Une étude complète

Exemple Construire la courbe

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^3}{t^2-1} \\ y(t) = \frac{t(3t-2)}{3(t-1)} \end{cases}$$

Solution. On note C la courbe à construire.

- **Domaine d'étude.** Pour $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ est défini si et seulement si $t \neq \pm 1$. Aucune réduction intéressante du domaine n'apparaît clairement et on étudie donc sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

- **Variations conjointes des coordonnées.** La fonction x est dérivable sur D et, pour $t \in D$,

$$x'(t) = \frac{3t^2(t^2-1) - t^3(2t)}{(t^2-1)^2} = \frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}.$$

La fonction x est donc strictement croissante sur $] -\infty, -\sqrt{3}]$ et sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ et strictement décroissante sur $[-\sqrt{3}, -1[$, sur $] -1, 1[$ et sur $] 1, \sqrt{3}]$.

La fonction y est dérivable sur $D \cup \{-1\}$ et, pour $t \in D \cup \{-1\}$,

$$y'(t) = \frac{(6t-2)(t-1) - (3t^2-2t)}{3(t-1)^2} = \frac{3t^2-6t+2}{3(t-1)^2}.$$

La fonction y est donc strictement croissante sur $] -\infty, 1 - \sqrt{\frac{1}{3}}]$ et sur $[1 + \sqrt{\frac{1}{3}}, +\infty[$, strictement décroissante sur $[1 - \sqrt{\frac{1}{3}}, 1[$ et sur $]1, 1 + \sqrt{\frac{1}{3}}]$.

Les fonctions x' et y' ne s'annulent jamais simultanément et la courbe est donc régulière. La tangente en un point $M(t)$ est dirigée par le vecteur dérivé $\left(\frac{t^2(t^2-3)}{(t^2-1)^2}, \frac{3t^2-6t+2}{3(t-1)^2}\right)$, ou encore par le vecteur $\left(\frac{3t^2(t^2-3)}{(t+1)^2}, 3t^2-6t+2\right)$.

- **Tangentes parallèles aux axes.** y' s'annule en $1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$ et $1 + \sqrt{\frac{1}{3}}$. En les points $M(1 - \sqrt{\frac{1}{3}})$ et $M(1 + \sqrt{\frac{1}{3}})$, la courbe admet une tangente parallèle à (Ox) . On a

$$x\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3}{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2 - 1} = \frac{1 - \sqrt{3} + 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}}{-\frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}} = \frac{42 - 26\sqrt{3}}{33} = -0,09 \dots$$

et de même,

$$y\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3} \frac{(1 - \sqrt{\frac{1}{3}})(3 - \sqrt{3} - 2)}{-\sqrt{\frac{1}{3}}} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3} = 0,17 \dots$$

<https://keepmath.com>

Puis, par un calcul conjugué, on a $x(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{42+26\sqrt{3}}{33} = 2,63 \dots$ et $y(1 + \sqrt{\frac{1}{3}}) = \frac{4+2\sqrt{3}}{3} = 2,48 \dots$

x' s'annule en $0, \sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. En les points $M(0) = (0, 0)$, $M(\sqrt{3}) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3+7\sqrt{3}}{6}\right) = (2,59 \dots, 2,52 \dots)$ et $M(-\sqrt{3}) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3-7\sqrt{3}}{6}\right) = (-2,59 \dots, -1,52 \dots)$, il y a une tangente parallèle à (Oy) .

- **Étude en l'infini.** Quand t tend vers $+\infty$, $x(t)$ et $y(t)$ tendent toutes deux vers $+\infty$ et il y a donc une branche infinie. Même chose quand t tend vers $-\infty$.

Étudions $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)}$. Pour $t \in D \setminus \{0\}$,

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{t(3t-2)}{3(t-1)} \times \frac{t^2-1}{t^3} = \frac{(3t-2)(t+1)}{3t^2}.$$

Cette expression tend vers 1 quand t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Pour $t \in D$,

$$y(t) - x(t) = \frac{t(3t-2)}{3(t-1)} - \frac{t^3}{t^2-1} = \frac{t(3t-2)(t+1) - 3t^3}{3(t-1)(t+1)} = \frac{t^2-2t}{3(t-1)(t+1)}.$$

Cette expression tend vers $\frac{1}{3}$ quand t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(y(t) - \left(x(t) + \frac{1}{3} \right) \right) = 0.$$

Quand t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la droite Δ d'équation $y = x + \frac{1}{3}$ est donc asymptote à la courbe.

Étudions la position relative de C et Δ . Pour $t \in D$, $y(t) - (x(t) + \frac{1}{3}) = \frac{t^2-2t}{3(t-1)(t+1)} - \frac{1}{3} = \frac{-2t+1}{3(t-1)(t+1)}$.

C et Δ se coupent au point $M(1/2) = (-1/6, 1/6)$.

- **Étude en $t = -1$.** Quand t tend vers -1 , $y(t)$ tend vers $-5/6$, et $x(t)$ tend vers $-\infty$ en -1^- et vers $+\infty$ en -1^+ . La droite d'équation $y = -5/6$ est asymptote à C . La position relative est fournie par le signe de $y(t) + \frac{5}{6} = \frac{6t^2+t-5}{6(t-1)} = \frac{(t+1)(6t-5)}{6(t-1)}$.

- **Étude en $t = 1$.** Quand t tend vers 1 , x et y tendent vers l'infini, $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{(3t-2)(t+1)}{3t^2}$ tend vers $\frac{2}{3}$ et

$$y(t) - \frac{2}{3}x(t) = \frac{t^3+t^2-2t}{3(t^2-1)} = \frac{t(t+2)}{3(t+1)}$$

tend vers $\frac{1}{2}$. La droite d'équation $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe. La position relative est fournie par le signe de $y(t) - (\frac{2}{3}x(t) + \frac{1}{2}) = \frac{2t^2+t-3}{6(t+1)} = \frac{(t-1)(2t+3)}{6(t+1)}$.

- **Intersection avec les axes.** $x(t) = 0$ équivaut à $t = 0$. La courbe coupe (Oy) au point $M(0) = (0, 0)$. $y(t) = 0$ équivaut à $t = 0$ ou $t = \frac{2}{3}$. La courbe coupe (Ox) au point $M(0) = (0, 0)$ et $M(\frac{2}{3}) = (-\frac{8}{15}, 0)$.

1.3.2 Une courbe de Lissajous

Exemple Construire la courbe

$$\begin{cases} x = \sin(2t) \\ y = \sin(3t) \end{cases}$$

<https://keepmath.com>

de la famille des courbes de Lissajous.

Solution.

- **Domaine d'étude.** Pour tout réel t , $M(t)$ existe et $M(t + 2\pi) = M(t)$. On obtient la courbe complète quand t décrit $[-\pi, \pi]$. Pour $t \in [-\pi, \pi]$, $M(-t) = s_O(M(t))$, puis pour $t \in [0, \pi]$, $M(\pi - t) = s_{(Oy)}(M(t))$. On étudie et on construit l'arc quand t décrit $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis on obtient la courbe complète par réflexion d'axe (Oy) puis par symétrie centrale de centre O . Puisque, pour tout réel t , $M(t + \pi) = s_{(Ox)}(M(t))$, l'axe (Ox) est également axe de symétrie de la courbe.

- **Localisation.** Pour tout réel t , $|x(t)| \leq 1$ et $|y(t)| \leq 1$. Le support de la courbe est donc contenu dans le carré

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}.$$

- **Variations conjointes.** D'après les propriétés usuelles de la fonction sinus, la fonction x est croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$; et de même, la fonction y croît sur $[0, \frac{\pi}{6}]$ et décroît sur $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.

- **Vecteur dérivé et tangente.** Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = (2 \cos(2t), 3 \cos(3t))$. Par suite :

$$\frac{d\vec{M}}{dt}(t) = \vec{0} \iff \cos(2t) = \cos(3t) = 0 \iff t \in \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right) \cap \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right) = \emptyset.$$

Donc $\frac{d\vec{M}}{dt}$ ne s'annule pas et la courbe est régulière. La tangente en tout point est dirigée par le vecteur $(2 \cos(2t), 3 \cos(3t))$.

Cette tangente est parallèle à (Ox) si et seulement si $\cos(3t) = 0$ ou encore $t \in \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$ ou enfin $t = \frac{\pi}{6}$ et $t = \frac{\pi}{2}$, et cette tangente est parallèle à (Oy) si et seulement si $\cos(2t) = 0$ ou encore $t \in \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ ou enfin $t = \frac{\pi}{4}$.

La tangente en $M(0)$ est dirigée par le vecteur $(2, 3)$ et a donc pour coefficient directeur $3/2$.

Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $M(t) \in (Ox)$ si et seulement si $\sin(3t) = 0$ ou encore $t \in \frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$ ou enfin $t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{3}$. La tangente en $M(\pi/3)$ est dirigée par le vecteur $(-1, -3)$ et a donc pour coefficient directeur 3.

1.3.3 Le folium de Descartes

Il existe d'autres façons de définir une courbe, par exemple par une équation cartésienne du type $f(x, y) = 0$. Par exemple, $(x^2 + y^2 - 1 = 0)$ définit le cercle de rayon 1, centré à l'origine.

Pour étudier les équations $f(x, y) = 0$, il nous manque un cours sur les fonctions de deux variables. Néanmoins, il est possible dès à présent de construire de telles courbes en trouvant une paramétrisation. Une idée (parmi tant d'autres), fréquemment utilisée en pratique, est de chercher l'intersection de la courbe avec toutes les droites passant par l'origine. Ceci revient en gros à prendre comme paramètre le réel $t = \frac{y}{x}$.

Exemple Construire le folium de Descartes C d'équation $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, a étant un réel strictement positif donné.

Solution. Commençons par montrer que l'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées est réduit à l'origine :

$$M(x, y) \in C \cap (Oy) \iff x^3 + y^3 - 3axy = 0 \text{ et } x = 0 \iff x = y = 0.$$

Soient $t \in \mathbb{R}$ et D_t la droite d'équation $y = tx$. Cherchons l'intersection de cette droite D_t avec notre courbe C :

$$\begin{aligned} M(x, y) \in D_t \cap C \setminus (Oy) &\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ y = tx \\ x^3 + t^3x^3 - 3atx^2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ y = tx \\ (1 + t^3)x - 3at = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \text{ pour } t \notin \{-1\} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \text{ pour } t \notin \{-1, 0\}. \end{aligned}$$

Ainsi C est la réunion de $\{O\}$ et de l'ensemble des points $(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3})$, $t \notin \{-1, 0\}$. D'autre part les droites D_{-1} et D_0 n'ont qu'un point commun avec C , à savoir le point O . Comme $t = 0$ refournit le point O , on a plus simplement :

$$C = \left\{ \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right) \mid t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \right\}.$$

Une paramétrisation de la courbe est donc

$$t \mapsto \begin{cases} x(t) = \frac{3at}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$$

Après étude, on obtient le graphe de la courbe.