

1 Primitives

1.1 Définitions

Définition 1.1 (Primitive). Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I vérifiant :

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Exemple. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2$.

- La fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puisque $F'(x) = f(x)$.
- La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = x^3 + 2$ est aussi une primitive de f sur $\mathbb{R}$ puisque $G'(x) = f(x)$.

Exemple. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$. Alors la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \sqrt{x^2 + 3} + \pi$ est une primitive de f .

En effet :

$$F'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} + 0 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} = f(x).$$

Proposition 1.1. Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I . Alors f admet une infinité de primitives : G est une primitive de f si et seulement si il existe un réel $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$,

$$G(x) = F(x) + k.$$

<https://keepmath.com>

Démonstration.

Si F et G sont deux primitives de f sur I alors :

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

Donc $F - G$ est une constante k . □

Proposition 1.2. Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I . Soit $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$. Alors il existe une et une seule primitive G telle que $G(a) = b$.

Démonstration.

On a vu qu'il existe une constante k telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$. D'où :

$$G(a) = b \iff F(a) + k = b \iff k = b - F(a).$$

□

Exemple. Il existe une unique primitive F de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$.

Les primitives sont de la forme $x \mapsto \frac{x^2}{2} + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

$F(1) = 2$ impose donc $\frac{1}{2} + k = 2$ d'où $k = \frac{3}{2}$.

1.2 Théorème fondamental

Théorème 1.1. Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et $x_0 \in [a, b]$. Alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$$

est la primitive de f qui s'annule en x_0 .

Démonstration.

Calculons la dérivée de F . Soient $x \in]a, b[$ et h un réel assez petit tel que $x + h \in]a, b[$.

On a :

$$F(x + h) - F(x) = \int_{x_0}^{x+h} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Donc :

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Ce taux d'accroissement est la moyenne de f sur $[x, x + h]$. Il existe donc $c \in [x, x + h]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Or, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $c = x + th$. Donc quand $h \rightarrow 0$, nécessairement $c \rightarrow x$ et comme f est continue alors $f(c) \rightarrow f(x)$.

On a donc :

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(x + th) = f(x).$$

Par suite $F'(x) = f(x)$.

<https://keepmath.com>

□

Théorème 1.2. Si f est une fonction continue sur un intervalle quelconque I de $\mathbb{R}$, alors elle admet une primitive sur I .

Remarque. Si F et G sont deux primitives de f sur un intervalle I , alors la différence $G - F$ est constante sur I .

On désigne par $\int f(x) dx$ toute primitive de f . Autrement dit :

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

où F est une primitive de f et C une constante réelle.

1.3 Primitives usuelles

Domaine	Primitive
$]0, +\infty[$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$
$\mathbb{R}^*$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
$\mathbb{R}$	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C, a \neq 0$
$\mathbb{R}$	$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C, a \neq 0$
$\mathbb{R}$	$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax) + C, a \neq 0$
$] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$
$]0, \pi[$	$\int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$
$] -a, a[$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$\mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
$\mathbb{R}$	$\int \operatorname{sh}(ax) dx = \frac{1}{a} \operatorname{ch}(ax) + C$
$\mathbb{R}$	$\int \operatorname{ch}(ax) dx = \frac{1}{a} \operatorname{sh}(ax) + C$
$\mathbb{R}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{argsh}(x) + C$

2 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

2.1 Définitions

Définition 2.1. On appelle **intégrale** de f sur $[a, b]$ le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive quelconque de f sur I . Il est noté :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Exemple. Calcul de l'intégrale $\int_2^3 x dx$:

Une primitive de $f(x) = x$ est $F(x) = \frac{x^2}{2}$.

Donc :

$$\int_2^3 x dx = F(3) - F(2) = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}.$$

Remarque. • L'intégrale d'une fonction f sur $[a, b]$ est indépendante du choix de la primitive F .

• On note aussi $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

• Dans l'écriture $\int_a^b f(x) dx$, la variable x est « muette », ce qui signifie que :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots$$

2.2 Propriétés de l'intégrale

Proposition 2.1. Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$, λf , $|f|$ et fg sont intégrables sur $[a, b]$ et on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b (f + g)(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \\ \int_a^b \lambda f(x) dx &= \lambda \int_a^b f(x) dx, \\ \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx, \\ \int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.\end{aligned}$$

2.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right) \left(\int_a^b (g(x))^2 dx \right).$$

Démonstration.

La fonction $(f + \lambda g)^2$ est positive sur $[a, b]$ pour tout réel λ . Donc le polynôme de deuxième degré

$$P(\lambda) = \int_a^b (f(x) + \lambda g(x))^2 dx$$

est toujours positif pour tout réel λ . Par suite son discriminant est négatif ou nul :

$$\Delta' = \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 - \left(\int_a^b (f(x))^2 dx \right) \left(\int_a^b (g(x))^2 dx \right) \leq 0.$$

□

Théorème 2.2. Si f est une fonction bornée sur $[a, b]$ et continue, sauf en un nombre fini de points de $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$. En particulier, si f est continue sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

2.4 Inégalité de la moyenne

Proposition 2.2. Soit f une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$. S'il existe des réels m, M et k tels que pour tout $x \in [a, b]$, on ait :

- $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$.
- $|f| \leq k$, alors $\int_a^b |f(x)| dx \leq k(b - a)$.

Définition 2.2 (Valeur moyenne). Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, ($a \neq b$). On appelle **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$ le nombre réel μ_f défini par :

$$\mu_f = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx.$$

Exemple. La valeur moyenne sur $[0, 1]$ de la fonction $f(x) = x^2$ est :

$$\mu = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2.5 Formule de la moyenne

Proposition 2.3 (Formule de la moyenne). Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, ($a \neq b$). Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c).$$

2.6 Inégalité des accroissements finis

Proposition 2.4 (Inégalité des accroissements finis). Soit f une fonction dont la dérivée f' est intégrable sur un intervalle $[a, b]$. S'il existe trois réels m, M et k tels que pour tout $x \in [a, b]$, on ait :

- $m \leq f'(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.
- $|f'(x)| \leq k$, alors $|f(b) - f(a)| \leq k(b-a)$.

3 Méthodes d'intégration

3.1 Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème 3.1 (Théorème fondamental du calcul intégral). Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une primitive de f . Alors :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

<https://keepmath.com>

3.2 Intégration par parties

Théorème 3.2 (Intégration par parties). Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Démonstration.

On a : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Donc :

$$\int_a^b (fg)'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx.$$

□

Exemple. Calculons $\int_1^e \ln(x) dx$.

On pose $f(x) = \ln(x)$ et $g'(x) = 1$, donc $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$.

Ainsi :

$$\int_1^e \ln(x) dx = [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e dx = e - (e - 1) = 1.$$

3.3 Changement de variables

Théorème 3.3 (Changement de variables). Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et $\varphi : J \rightarrow I$ une application bijective d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle I , tels que φ et φ^{-1} soient continûment dérivables. On a alors :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Démonstration.

Si F est une primitive de f alors :

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Donc :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_a^b (F \circ \varphi)'(t) dt = [(F \circ \varphi)(t)]_a^b = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

□

Remarque. Si F est une primitive de f alors :

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Exemple. Calculons l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{2t}{(t^2+1)^2} dt$.

Posons $\varphi(t) = t^2 + 1$, donc $\varphi'(t) = 2t$.

Ainsi :

$$I = \int_0^1 \frac{\varphi'(t)}{(\varphi(t))^2} dt = \int_1^2 \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u} \right]_1^2 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Exemple. Calculons la primitive $\int \sin x \cos x dx$ sur l'intervalle $] -1, 1[$.

Posons $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$.

D'où :

$$\int \sin x \cos x dx = \int t dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\sin x)^2 + C.$$

3.4 Fractions rationnelles

Définition 3.1. On appelle **fraction rationnelle réelle** toute fonction f de la forme :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

où P et Q sont deux polynômes à coefficients réels.

Définition 3.2 (Division euclidienne). Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux polynômes réels. On appelle **division euclidienne** (ou division selon les puissances décroissantes) de $A(x)$ par $B(x)$ l'unique couple (Q, R) tel que :

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

avec $R = 0$ ou bien $\deg R < \deg B$.

3.5 Décomposition en éléments simples

Proposition 3.1. *Tout polynôme non nul $P(x)$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ s'écrit sous la forme :*

$$P(x) = c \prod_{k=1}^p (x - r_k)^{m_k} \prod_{k=1}^q (x^2 + b_k x + c_k)^{n_k},$$

avec $b_k^2 - 4c_k < 0$, $m_k, n_k \in \mathbb{N}$ pour $1 \leq k \leq n$ et $c \neq 0$.

Théorème 3.4 (Décomposition en éléments simples). *Soit $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle telle que $P(x)$ et $Q(x)$ n'ont aucune racine commune. Si*

$$Q(x) = c \prod_{k=1}^p (x - r_k)^{m_k} \prod_{k=1}^q (x^2 + b_k x + c_k)^{n_k},$$

avec $b_k^2 - 4c_k < 0$ et $c \neq 0$, alors la décomposition en éléments simples de $f(x)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme :

$$f(x) = E(x) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{i,j}}{(x - r_i)^j} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^{n_i} \frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j},$$

où A_{ij} , B_{ij} et C_{ij} sont des constantes réelles, et $E(x)$ est un polynôme appelé **partie entière** de la fraction rationnelle $f(x)$.

Remarque. Pour calculer une primitive de $f(x)$, il suffit alors de calculer les primitives de :

$$E(x), \quad \frac{a}{(x - b)^n}, \quad n \geq 1 \quad \text{et} \quad \frac{ax + b}{(x^2 + cx + d)^n}, \quad n \geq 1, \quad c^2 - 4d < 0.$$

Proposition 3.2.

$$\int \frac{a}{(x - b)^n} dx = \begin{cases} a \ln |x - b| + C & \text{si } n = 1, \\ -\frac{a}{(n - 1)(x - b)^{n-1}} + C & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Proposition 3.3.

$$\int \frac{ax + b}{(x^2 + cx + d)^n} dx = \frac{a}{2} \int \frac{2x + c}{(x^2 + cx + d)^n} dx + \left(b - \frac{ac}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2 + cx + d)^n}.$$

Proposition 3.4.

$$\int \frac{2x + c}{(x^2 + cx + d)^n} dx = \begin{cases} \ln |x^2 + cx + d| + C & \text{si } n = 1, \\ -\frac{1}{(n - 1)(x^2 + cx + d)^{n-1}} + C & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Proposition 3.5 (Relation de récurrence pour I_n).

$$I_{n+1}(x) = \frac{1}{2n} \frac{x}{(1 + x^2)^n} + \frac{2n - 1}{2n} I_n(x),$$

où $I_n(x) = \int \frac{dx}{(1 + x^2)^n}.$

Exemple. Calculons $J(x) = \int \frac{dx}{(x^2 + x + \frac{5}{4})^2}$.

Posons $u = x + \frac{1}{2}$. On obtient :

$$J(x) = \int \frac{du}{(u^2 + 1)^2} = I_2(u).$$

D'après la relation de récurrence :

$$I_2(u) = \frac{1}{4} \frac{u}{(u^2 + 1)^2} + \frac{3}{4} \arctan u + C.$$

Donc :

$$J(x) = \frac{1}{4} \frac{x + \frac{1}{2}}{((x + \frac{1}{2})^2 + 1)^2} + \frac{3}{4} \arctan \left(x + \frac{1}{2} \right) + C.$$

Exemple. Calculons $I(x) = \int \frac{x^3 + 4x - 1}{x^2 - 1} dx$.

La division euclidienne de $P(x) = x^3 + 4x - 1$ par $Q(x) = x^2 - 1$ donne :

$$P(x) = xQ(x) + 5x - 1.$$

Donc :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = x + \frac{5x - 1}{(x - 1)(x + 1)} = x + \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}.$$

Pour calculer a , on multiplie par $x - 1$ puis on donne à x la valeur 1 :

$$a = 2.$$

Pour calculer b , on multiplie par $x + 1$ puis on donne à x la valeur -1 :

$$b = 3.$$

Donc :

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int x dx + \int \frac{2 dx}{x - 1} + \int \frac{3 dx}{x + 1} = \frac{1}{2} x^2 + 2 \ln |x - 1| + 3 \ln |x + 1| + C.$$

3.6 Règles de Bioche

Pour choisir le changement de variable dans une intégrale de la forme $\int R(\cos x, \sin x) dx$, on utilise les règles de Bioche :

- Si $f(-x) = f(x)$, on pose $t = \cos x$.
- Si $f(\pi - x) = f(x)$, on pose $t = \sin x$.
- Si $f(\pi + x) = f(x)$, on pose $t = \tan x$.
- Sinon, on pose $t = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$.

Exemple. Calculons une primitive sur $] -\pi, \pi[$ de la fonction :

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

On a $f(-x) = f(x)$, donc on utilise $t = \cos x$.

On a $dt = -\sin x dx$.

Donc :

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx = - \int \frac{dt}{1 + t} = - \ln |1 + t| = - \ln(1 + \cos x).$$

3.7 Sommes de Riemann

Proposition 3.6. *Si f est intégrable sur $[a, b]$, la suite (S_n) définie par*

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

tend vers $\int_a^b f(x) dx$ quand n tend vers $+\infty$.

Exemple. *Calculons la limite de la suite $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}$.*

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

On a :

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2.$$

<https://keepmath.com>