

Notions Topologiques dans $\mathbb{R}^n$

1 L'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ est l'espace produit de n ensembles identiques à $\mathbb{R}$, i.e

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}}, \text{ où } n \in \mathbb{N}^*.$$

Un élément x de $\mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, où les x_i sont des réels.

L'espace $\mathbb{R}^n$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Il suffit de poser pour tout couple $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

$\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie ($\dim \mathbb{R}^n = n$) dont $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique où $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ et $e_n = (0, \dots, 0, 1)$.

1.1 Distances

Définition 1.1 (Distance). Soit E un ensemble quelconque. On appelle **distance** (ou **métrique**) sur E toute application d définie de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) $\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) = 0 \iff x = y$ (Séparation);
- 2) $\forall (x, y) \in E \times E, d(x, y) = d(y, x)$ (Symétrie);
- 3) $\forall (x, y, z) \in E \times E \times E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Inégalité triangulaire).

L'ensemble E muni de cette distance est appelé **espace métrique** noté (E, d) .

Exemple. 1) L'application définie par $d(x, y) = |x - y|$ est une distance sur $\mathbb{R}$.

2) L'application définie par $d(x, y) = |x - y| + \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$ est une distance sur $\mathbb{R}^*$.

3) L'application définie sur $E \times E$ par

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

est une distance sur E appelée la **distance discrète**.

1.2 Normes

Définition 1.2 (Norme). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle **norme** sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0$ (Séparation);
- 2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ (Homogénéité);
- 3) $\forall (x, y) \in E \times E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (Inégalité triangulaire).

$N(x)$ la norme de x est souvent notée $\|x\|_E$ ou $\|x\|$. L'espace E muni de cette norme est appelé **espace vectoriel normé** (e.v.n). On le note $(E, \|\cdot\|)$.

Exemple (Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$). On peut munir l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ par les normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ en posant pour chaque élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|;$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \quad (\text{Norme euclidienne});$$

$$\|x\|_\infty = \sup_{i=1, \dots, n} |x_i| \quad (\text{Norme sup ou infini}).$$

Remarque. 1) Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrique dont la distance est définie par $d(x, y) = \|x - y\|$. Cette distance est appelée distance associée à la norme $\|\cdot\|$ et on a $\|x\| = d(x, 0)$ pour tout $x \in E$.

2) On peut trouver des espaces métriques dont la distance n'est associée à aucune norme.

Proposition 1.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

$$\forall x \in E, \quad \|x\| \geq 0 \text{ et } \|-x\| = \|x\|.$$

$$\forall x_1, \dots, x_p \in E, \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \quad \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^p |\lambda_i| \|x_i\|.$$

$$\forall x, y \in E, \quad \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Définition 1.3 (Normes équivalentes). Deux normes N_1 et N_2 , définies sur un même espace vectoriel normé E , sont dites **équivalentes** s'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que

$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x), \quad \forall x \in E.$$

On écrit alors $N_1 \sim N_2$.

Remarque. Généralement, dans un espace vectoriel normé de dimension finie (en particulier dans $\mathbb{R}^n$) toutes les normes sont équivalentes.

2 Notions topologiques dans $\mathbb{R}^n$

2.1 Boules ouvertes, boules fermées et parties bornées

Définition 2.1 (Boules et sphères). Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

1) La partie $S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| = r\}$ est appelée **sphère** de centre a et de rayon r .

2) On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r la partie de $\mathbb{R}^n$ notée $B(a, r)$ et définie par

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}.$$

3) On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r la partie de $\mathbb{R}^n$ notée $B_f(a, r)$ et définie par

$$B_f(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}.$$

Remarque. – Dans le cas où $a = 0_{\mathbb{R}^n}$ et $r = 1$, on parle des boules et sphères unités.

– Les boules (resp. sphères) ont des formes géométriques différentes selon les normes utilisées.

Exemple. Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$:

$$S_{\|\cdot\|_1}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\},$$

$$B_{\|\cdot\|_1}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}.$$

Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$:

$$S_{\|\cdot\|_2}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\},$$

$$B_{\|\cdot\|_2}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$:

$$S_{\|\cdot\|_\infty}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) = 1\},$$

$$B_{\|\cdot\|_\infty}((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max(|x|, |y|) < 1\}.$$

Définition 2.2 (Partie bornée). Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite **bornée** si elle est incluse dans une boule (ouverte ou fermée). Dans ce cas, le diamètre de A est fini, où le diamètre est défini par

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(a,b) : (a,b) \in A \times A\} < \infty.$$

Autrement dit, A est bornée dans $\mathbb{R}^n$ si, et seulement si il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in A$ on a $\|x\| \leq M$.

2.2 Les ouverts et les fermés de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.3 (Ouvert). On dit qu'une partie $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^n$ est **ouverte** si elle est vide ou si pour tout $a \in \mathcal{O}$, il existe une boule ouverte de centre a contenue dans $\mathcal{O}$.

C'est-à-dire, $\mathcal{O}$ est un ouvert si, et seulement si, $\mathcal{O} = \emptyset$ ou $\forall a \in \mathcal{O}, \exists r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \mathcal{O}$.

Définition 2.4 (Fermé). On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}^n$ est **fermée** si son complémentaire $\complement_{\mathbb{R}^n} F$ est un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque. – Généralement, les définitions précédentes restent les mêmes dans n'importe quel espace vectoriel normé E .

- Les notions d'ouvert et de fermé dans $\mathbb{R}^n$ sont indépendantes de la norme choisie car toutes les normes de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Exemple. 1) Les boules ouvertes (resp. fermées) de $\mathbb{R}^n$ sont des ouverts (resp. fermés) dans $\mathbb{R}^n$.

2) Toute partie finie (contient un nombre fini d'éléments) de $\mathbb{R}^n$ est fermée.

3) $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont à la fois ouverts et fermés.

Proposition 2.1 (Propriétés des ouverts et fermés). 1) Toute union (finie ou infinie) d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert.

2) Toute intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert.

3) Toute union finie de fermés de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.

4) Toute intersection (finie ou infinie) de fermés de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.

2.3 Voisinages

Définition 2.5 (Voisinage). On dit qu'une partie V de $\mathbb{R}^n$ est un **voisinage** de $a \in \mathbb{R}^n$ si V contient une boule de centre a . On note par $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a .

Autrement dit, $V \in \mathcal{V}(a)$ si, et seulement si, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$.

Proposition 2.2 (Propriétés des voisinages). Soit $a \in \mathbb{R}^n$.

- 1) Si $V \in \mathcal{V}(a)$ alors $a \in V$.
- 2) Toute intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a .
- 3) Si $V \in \mathcal{V}(a)$ et $V \subset W$ alors $W \in \mathcal{V}(a)$.

Remarque. Dans un espace vectoriel normé E , deux normes équivalentes N_1 et N_2 définissent la même topologie, c'est-à-dire, les ouverts de (E, N_1) sont des ouverts de (E, N_2) et réciproquement. Il en est donc de même pour les fermés et les voisinages.

2.4 Suites de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.6 (Convergence dans $\mathbb{R}^n$). Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, $x_k = (x_1^k, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On dit que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ **converge** vers $l \in \mathbb{R}^n$ si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - l\| = 0,$$

ce qui signifie que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N$ on a $\|x_k - l\| < \varepsilon$.

Dans ce cas, la limite l est unique et on note $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = l$ ou $x_k \rightarrow l$.

<https://keepmath.com>

Définition 2.7 (Suites de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$). On dit qu'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est de **Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que } \forall p \geq N, \forall q \geq N \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Théorème 2.1 (Convergence composante par composante). Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$, avec $x_k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente vers $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ si, et seulement si, les n suites réelles $(x_1^k)_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (x_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont convergentes vers $l_1, \dots, l_n$ respectivement.

On dit que la convergence dans $\mathbb{R}^n$ est équivalente à la convergence composante par composante.

Remarque. Par le même principe, on peut généraliser des résultats connus pour les suites réelles au cas des suites dans $\mathbb{R}^n$:

- 1) Une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ est de Cauchy si, et seulement si, les n suites réelles $(x_1^k)_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (x_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont toutes de Cauchy.
- 2) Toute suite convergente de $\mathbb{R}^n$ est une suite de Cauchy. La réciproque n'est pas vérifiée sauf dans un espace complet, ce qui est le cas pour $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.
- 3) Toute suite convergente $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $\|x_k\| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$. De plus $\left\| \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \right\| \leq M$.
- 4) **Théorème de Bolzano-Weierstrass** : De toute suite bornée de $\mathbb{R}^n$, on peut extraire une sous-suite qui converge.

2.5 Adhérence, Intérieur et Frontière

Définition 2.8 (Adhérence, Intérieur, Frontière). Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.

- 1) L'**adhérence** de A , notée $\overline{A}$ (ou $\text{adh}(A)$), est le plus petit ensemble fermé contenant A . D'après la Proposition sur les fermés, l'adhérence de A n'est autre que l'intersection de tous les fermés contenant A .
- 2) L'**intérieur** de A , noté $\overset{\circ}{A}$ (ou $\text{Int}(A)$), est le plus grand ouvert contenu dans A . C'est la réunion de tous les ouverts contenus dans A .
- 3) La **frontière** de A , notée ∂A (ou $\text{Fr}(A)$), est l'ensemble des points adhérents à A qui ne sont pas des points intérieurs à A . C'est-à-dire,

$$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap (\overset{\circ}{A})^c.$$

Remarque. Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$:

- $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$;
- A est fermé si, et seulement si, $A = \overline{A}$;
- A est ouvert si, et seulement si, $A = \overset{\circ}{A}$;
- $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A}^c$.

Proposition 2.3 (Caractérisation de l'adhérence). Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$.

- 1) $x \in \overset{\circ}{A}$ si, et seulement si, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$.
- 2) $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ on a $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$.
- 3) $x \in \overline{A}$ si, et seulement si, il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x .
- 4) A est fermé si, et seulement si, pour toute suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de A qui converge vers x on a $x \in A$.

2.6 Parties compactes de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.9 (Compact). Une partie K de $\mathbb{R}^n$ est dite **compacte** si elle est fermée et bornée.

Exemple. 1) Les boules fermées, les sphères et les parties finies sont des compacts de $\mathbb{R}^n$.

- 2) La boule $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$ n'est pas compacte car c'est une partie non fermée.
- 3) L'ensemble $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \geq r\}$ n'est pas compacte car c'est une partie non bornée.

Théorème 2.2 (Bolzano-Weierstrass). Soit K une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) K est compact;
- 2) De toute suite de K , on peut extraire une sous-suite convergente dans K .

2.7 Parties convexes de $\mathbb{R}^n$

Définition 2.10 (Segment). Soient a et b deux points de $\mathbb{R}^n$. On appelle **segment** de $\mathbb{R}^n$ d'extrémités a et b , l'ensemble noté $[a, b]$ et défini par

$$[a, b] = \{(1 - t)a + tb \mid t \in [0, 1]\} = \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\}.$$

Définition 2.11 (Partie convexe). Une partie C de $\mathbb{R}^n$ est dite **convexe** si pour tous points a et b de C , le segment $[a, b]$ est inclus dans C .

Autrement dit,

$$\forall a, b \in C, \forall t \in [0, 1], \text{ on a } a + t(b - a) \in C.$$

Exemple. Toute boule (ouverte ou fermée) de $\mathbb{R}^n$ est convexe.

<https://keepmath.com>