

La Convergence Uniforme

1 Définitions

La plupart des fonctions qu'on utilise sont des polynômes, fractions rationnelles ou fonctions transcendentes. Il y a, cependant, d'autres fonctions très utiles en analyse. Notre but est de trouver une représentation de ces fonctions qui est en fait compatible avec les opérations élémentaires du calcul; de plus on voudrait que cette représentation soit de telle sorte qu'on puisse approcher ces fonctions aussi près qu'on veut et que tout le procédé soit par des fonctions simples. La notion des séries peut, en fait, accomplir cette tâche. Maintenant pour que la fonction définie par une série jouisse de certaines qualités sur un domaine donné, il faut que la convergence se fasse d'une certaine manière : c'est l'objet de ce chapitre.

Avant de commencer nous faisons une remarque : Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série dont les sommes

partielles sont définies par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$; nous dirons que S_n sont s.p.s (sommes partielles d'une série). Réciproquement, chaque suite S_n définit une série ayant S_n pour s.p. : En effet, posons $u_1 = S_1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geq 2$. Alors :

$$S_n = S_n - S_{n-1} + S_{n-1} - S_{n-2} + \cdots + S_2 - S_1 + S_1 = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_1.$$

D'où $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

Pour cette raison nous allons considérer des suites $(S_n)_{n \geq 0}$, mais lorsqu'il s'agira d'une série nous dirons que S_n est s.p.s.

Maintenant pour se fixer les idées, soit I un intervalle et $S_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ une suite. Si pour chaque $x_0 \in I$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x_0)$ existe, disons $S(x_0)$, on a alors :

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon, x_0).$$

D'autre part, si x parcourt I , il n'y a aucune raison que $(N(\varepsilon, x))_{x \in I}$ soit bornée et par suite il est à priori difficile d'avoir un seul $N(\varepsilon)$ pour tout $x \in I$: une fois cette condition est réalisée, on dit alors que S_n converge uniformément sur I .

Définition 1.1 (Convergence uniforme). Soit $S_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ une suite. On dit que S_n **converge uniformément** vers S sur I lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall x \in I, \forall n > N(\varepsilon), |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

Avant de continuer, posons

$$M_n \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)|.$$

Théorème 1.1 (Condition nécessaire et suffisante de convergence uniforme). Une condition nécessaire et suffisante pour que $(S_n)_n$ converge uniformément vers S sur I est que M_n converge vers 0.

Démonstration.

Condition suffisante. Supposons que M_n tend vers 0. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } n > N(\varepsilon) \implies 0 \leq M_n < \varepsilon.$$

Mais alors $|S_n(x) - S(x)| \leq M_n = \sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)|$.

Donc, pour tout $x \in I$ et tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$n > N(\varepsilon) \implies |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

C'est-à-dire que S_n converge uniformément vers S sur I .

Condition nécessaire. Supposons que S_n converge uniformément vers S sur I ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } n > N(\varepsilon) \implies |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall x \in I.$$

Donc, $0 \leq M_n < \varepsilon$, dès que $n > N(\varepsilon)$.

Autrement dit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = 0$. □

Exemple. 1) Soit $S_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ avec $I = [0, \pi]$.

On a $|S_n(x) - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout $x \in I$. Par suite, $M_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$; de plus M_n converge vers 0.

Donc S_n converge uniformément sur I vers 0.

2) Soit $S_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ avec $I = [0, 1]$.

Pour chaque x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = x$. La question maintenant est de savoir si cette convergence est uniforme ou non sur I .

Pour cela regardons :

$$|S_n(x) - x| = \left| \frac{nx^2}{1+nx} - x \right| = \left| \frac{nx^2 - x - nx^2}{1+nx} \right| = \frac{x}{1+nx} \leq \frac{1}{n}.$$

Par suite, $M_n \leq \frac{1}{n}$; d'où $S_n(x)$ converge uniformément vers x sur I .

3) Soit $S_n(x) = x^n$ avec $I = [0, 1]$.

Pour chaque x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 0$ pour $x \in [0, 1[$, et $S_n(1) = 1$.

Mais $\sup_{x \in [0, 1]} |S_n(x) - S(x)| = 1$. Donc, comme M_n ne tend pas vers 0, il s'ensuit alors que

$S_n(x)$ ne converge pas uniformément sur I .

Théorème 1.2 (Critère de Cauchy uniforme). Soit S_n définie sur I . La condition nécessaire et suffisante pour que S_n converge uniformément vers S est que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), \forall x \in I, \forall m, n > N(\varepsilon), |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon.$$

Théorème 1.3 (Test du sup de Weierstrass). Soient u_n définies sur I telles que :

$$|u_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in I, \forall n.$$

Alors si $\sum M_n$ converge, la série $\sum u_n(x)$ converge en fait uniformément sur I .

2 Applications de la convergence uniforme

Étant donné deux opérations α, β (qui peuvent être tout simplement $+, \cdot, \lim, \dots$), la question que nous allons attaquer est de trouver les conditions pour qu'une suite $S_n(x)$ vérifie :

$$\alpha(\beta(S_n(x))) = \beta(\alpha(S_n(x))).$$

Tout d'abord, sachez que si S_n converge uniformément, alors on peut intervertir ces deux opérations. Pour voir cela, on commence par un exemple.

Soit $S_n(x) = x^n$ sur $I = [0, 1]$. Pour $x = 1$, $S_n(1) = 1$ et par suite $S_n(1)$ converge vers 1.

Mais pour tout $x \in [0, 1[$, on a $S_n(x)$ converge vers 0.

Par conséquent,

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

est la limite de $S_n(x)$. Il est maintenant clair que S est discontinue en 1. Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 1} S_n(x) \right) = 1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \right) = 0.$$

C'est là où vient la convergence uniforme : elle nous donne en fait une condition suffisante pour que la limite soit continue.

Théorème 2.1 (Continuité de la limite uniforme). *On suppose que S_n converge uniformément vers S sur un intervalle I et que chaque $x \mapsto S_n(x)$ est continue sur I .*

Alors $x \mapsto S(x)$ est aussi continue sur I .

Démonstration.

Soit $x_0 \in I$. Pour chaque n on a :

$$|S(x) - S(x_0)| \leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)|.$$

Pour $|x - x_0| < \eta$, on a le deuxième terme $< \frac{\varepsilon}{3}$ par continuité de S_n .

Pour $n \geq N_0$, on a le premier et le troisième termes $< \frac{\varepsilon}{3}$.

Donc,

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon \quad \text{dès que } |x - x_0| < \eta.$$

□

Corollaire 2.1. *Si (u_n) est une suite de fonctions continues sur I et $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge uniformément sur I , alors $S(x) = \sum_{n \geq 0} u_n(x)$ est continue sur I .*

Exemple. Soit $S_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$ sur $[0, 1]$. Alors,

$$\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \right) dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

D'autre part,

$$\int_0^1 S_n(x) dx = 1 - e^{-n}.$$

Par suite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 S_n(x) dx \right) = 1.$$

Moralité : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \neq \int \lim.$

Théorème 2.2 (Intégration terme à terme). Soit $(f_n(x))_n$ une suite de fonctions intégrables sur $[a, b]$. On suppose que f_n converge uniformément vers f sur I . Alors f est intégrable sur I et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) dt.$$

Corollaire 2.2. 1) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ et converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors :

1) f est continue (donc intégrable),

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$

2) Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions croissantes sur I et converge uniformément vers f sur I . Alors :

1) f est intégrable sur I ,

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$

3) Si $(u_n)_n$ est une suite intégrable (e.g., continue ou croissante) sur I et $\sum u_n$ converge uniformément sur I , alors :

$$\int_a^b \sum u_n = \sum \int_a^b u_n.$$

Exemple. On suppose que $|x| \leq r < 1$, alors :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Donc, pour tout x , $|x| \leq r$, on a :

$$\left| \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 - x^4 + \dots + (-1)^n x^{2n} \right| \leq \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq r^{2n+2}.$$

Par suite, la convergence est uniforme dans $[-r, r]$ (car elle est normale); d'où pour $|x| \leq r$, on a :

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Donc, pour chaque y , $|y| \leq r$, on a :

$$\arctan y = \int_0^y \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \int_0^y t^{2n} dt.$$

Ou encore :

$$\arctan y = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1}, \quad |y| \leq r.$$

Exemple. Soit $S_n(x) = xe^{-nx^2}$ avec $I = [-1, 1]$. Alors $S_n(x)$ converge uniformément vers $S(x) = 0$. En effet, le maximum de S_n est atteint sur I en $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$.

Donc,

$$|S_n(x)| \leq S_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \cdot e^{-1/2} \rightarrow 0, \quad \forall x \in I.$$

Donc, $S'_n(x) = 0$ pour tout $x \in (-1, 1)$ n'est pas vrai.

Mais $S'_n(x) = e^{-nx^2}(1 - 2nx^2)$ et par suite pour $x = 0$, $S'_n(0) = 1$ pour tout n .

Donc, $S'_n(0) \rightarrow 1 \neq S'(0) = 0$.

Par conséquent, la convergence uniforme de S_n ne suffit pas pour conclure que :

$$\frac{d}{dx} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{d}{dx} S_n(x) \right).$$

Théorème 2.3 (Dérivation terme à terme). Soit (S_n) une suite telle que :

- 1) S_n est dérivable sur $I = [a, b]$,
- 2) S'_n est intégrable sur $I = [a, b]$,
- 3) Il existe $x_0 \in I$ tel que $S_n(x_0)$ converge,
- 4) S'_n converge uniformément vers une fonction continue σ sur I .

Alors, S_n converge uniformément vers une fonction dérivable S et $S' = \sigma$ sur I .

Démonstration.

Comme S_n est dérivable et S'_n est intégrable sur I , il s'ensuit alors que :

$$S_n(x) = \int_{x_0}^x S'_n(t) dt + S_n(x_0).$$

Donc,

$$S_n(x) - S_m(x) = \int_{x_0}^x (S'_n(t) - S'_m(t)) dt + (S_n(x_0) - S_m(x_0)).$$

Ce qui donne :

$$|S_n(x) - S_m(x)| \leq \int_{x_0}^x |S'_n(t) - S'_m(t)| dt + |S_n(x_0) - S_m(x_0)|.$$

Par le théorème de Cauchy, on a :

$$|S'_n(t) - S'_m(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in I, \quad \forall m, n > N(\varepsilon).$$

De plus, on a :

$$|S_n(x_0) - S_m(x_0)| < \varepsilon.$$

Donc,

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon(x - x_0) + \varepsilon \leq \varepsilon(b - a + 1).$$

Donc S_n converge uniformément sur I (pour $x < x_0$ le raisonnement est symétrique).

Soit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = S(x)$ et noter que $\sigma = \lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n(x)$.

Regardons $S_n(x) - S_n(x_0) = \int_{x_0}^x S'_n(t) dt$. En passant à la limite on a :

$$S(x) - S(x_0) = \int_{x_0}^x \sigma(t) dt.$$

Maintenant comme σ est continue, il s'ensuit que $S'(x) = \sigma(x)$ pour tout $x \in I$. □

Exemple. Soit $S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^{3/2}}$.

Cette série converge uniformément car $\left| \frac{\sin(nx)}{n^{3/2}} \right| \leq \frac{1}{n^{3/2}} = M_n$.

De plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$ converge aussi.

Par suite, $S'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$.

3 Critères d'Abel et Dirichlet; Théorème de Dini

Dans la recherche des conditions suffisantes pour la convergence uniforme pour les séries, on a vu le test de Weierstrass qui nécessite la convergence absolue aussi bien qu'uniforme. Ces critères qu'on va présenter ici ne reposent pas sur la convergence absolue mais reposent sur l'identité suivante dite d'Abel.

Dans le cas où les fonctions ne dépendent pas de x , on a des conditions de convergence tout simplement. D'autre part, noter qu'une suite de fonctions continues convergente vers une fonction continue sans qu'il y ait convergence uniforme. Mais il y a un cas où ceci ne peut pas arriver : en fait, dans ce cas, de la continuité de la limite on peut déduire la convergence uniforme de la suite : c'est le cas dans le théorème de Dini où la convergence est monotone.

Lemme 3.1 (Identité d'Abel). Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites et posons $U_n - U_{n-1} \stackrel{\text{déf}}{=} u_n$. Alors

$$\sum_{k=n+1}^m u_k v_k = U_m v_m - U_n v_{n+1} - \sum_{k=n+1}^m U_k (v_{k+1} - v_k).$$

Théorème 3.1 (Dirichlet). Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites sur un intervalle I . On suppose que :

- 1) $\sum_{n \geq 0} u_n(x)$ converge uniformément sur I ;
- 2) $\sum_{n \geq 1} |v_n(x) - v_{n-1}(x)| \leq K, \forall x \in I$;
- 3) $|v_0(x)| \leq K, \forall x \in I$.

Alors $\sum_{n \geq 0} u_n(x) v_n(x)$ converge uniformément sur I .

Théorème 3.2 (Abel). Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites de fonctions définies sur un intervalle I . On suppose que :

- 1) Il existe M tel que $|\sum_{k=0}^n u_k(x)| \leq M, \forall x \in I$;
- 2) $\sum_{n=1}^{+\infty} |v_n(x) - v_{n-1}(x)|$ converge uniformément sur I ;
- 3) $v_n(x)$ converge uniformément vers 0 sur I .

Alors $\sum_{n \geq 0} u_n(x) v_n(x)$ converge uniformément sur I .

Exemple. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ avec $|x| \leq 1$.

Pour $|x| < 1$, il est clair que $f(x) = \arctan x$; maintenant regardons les extrémités.
Soit

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} & \text{si } x = 1, \\ \arctan x & \text{si } |x| < 1. \end{cases}$$

Si f était continue on aurait :

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \arctan x = \frac{\pi}{4}.$$

Maintenant si la convergence est uniforme sur $|x| \leq 1$, f sera continue. Pour l'uniforme continuité on va appliquer le critère d'Abel en posant :

$$u_n(x) = (-1)^n x^{2n+1}, \quad v_n(x) = \frac{1}{2n+1}.$$

On a $|U_n(x)| = \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k+1} \right| \leq 2$ pour $|x| \leq 1$.

En effet,

$$U_n(x) = \frac{x(1 - (-x^2)^{n+1})}{1 + x^2}.$$

Donc, $|U_n(x)| \leq \frac{1 \cdot (1+1)}{1} = 2$ pour $|x| \leq 1$.

De plus, $\sum_{k=1}^{+\infty} |v_k(x) - v_{k-1}(x)|$ converge uniformément sur I car elle ne dépend pas de x , et

$$v_k(x) = \frac{1}{2k+1}.$$

<https://keepmath.com>

Donc, la convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n(x) v_n(x)$ est uniforme et par suite f est continue.

$$\text{Finalement, } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Théorème 3.3 (Dini). Soit $(S_n)_n$ une suite croissante de fonctions continues sur $I = [a, b]$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = S$ soit continue. Alors la convergence est uniforme sur I .

Démonstration.

On va raisonner par l'absurde. Supposons que $M_n = \sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)|$ ne tende pas vers zéro.

Par suite, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $M_n > \varepsilon_0$. Choisissons une sous-suite extraite $(n_k)_k$ et posons :

$$N_k = M_{n_k}, \quad S(x) = \sigma(x), \quad S_{n_k}(x) = \sigma_k(x).$$

Comme $\sigma_k - \sigma$ est continue, il existe alors $x_k \in I$ tel que :

$$N_k = \sigma_k(x_k) - \sigma(x_k).$$

Maintenant $(x_k) \subseteq [a, b]$ et par suite elle admet un point d'accumulation ξ dans $[a, b]$. Donc, il existe une sous-suite (x_{k_j}) extraite de (x_k) qui converge vers ξ .

D'autre part, $R_k \stackrel{\text{déf}}{=} \sigma_k - \sigma$ est décroissante tendant vers 0 en tout point. En particulier en ξ :

$$0 \leq R_k(\xi) \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \quad \text{pour } k > N.$$

D'autre part,

$$R_{k_j}(x_{k_j}) \geq \varepsilon_0.$$

Pour $m < k_j$ on a :

$$R_m(x_{k_j}) \geq R_{k_j}(x_{k_j}) \geq \varepsilon_0.$$

Quand j tend vers $+\infty$, par continuité, $R_m(x_{k_j})$ tend vers $R_m(\xi)$. Donc,

$$R_m(\xi) \geq \varepsilon_0 \quad \text{pour tout } m.$$

Mais ceci est une contradiction avec l'inégalité $R_k(\xi) \leq \frac{\varepsilon_0}{2}$.

□

<https://keepmath.com>