

Fonctions de plusieurs variables réelles

1 Préliminaires

1.1 Fonctions numériques de plusieurs variables

Définition 1.1 (Fonction numérique de plusieurs variables). Une **fonction numérique de n variables réelles** est une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On écrit

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

- 1) L'ensemble $\mathcal{D}$ est appelé **domaine de définition** de la fonction f .
- 2) L'ensemble $f(\mathcal{D}) = \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}\} \subset \mathbb{R}$ est appelé l'**image** de $\mathcal{D}$ par f .
- 3) Si $A \subset \mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}(A) = \{x \in \mathcal{D} \mid f(x) \in A\} \subset \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est appelé l'**image réciproque** de A par f .
- 4) Pour tout réel α , on appelle **courbe de niveau** α de la fonction f , l'ensemble $\mathcal{C}_\alpha$ des points de $\mathcal{D}$ dont l'image par f vaut α , c'est-à-dire,

$$\mathcal{C}_\alpha = \{x \in \mathcal{D} \mid f(x) = \alpha\} = f^{-1}(\{\alpha\}) \subset \mathbb{R}^n.$$

- 5) L'ensemble $\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in \mathcal{D}\}$ est appelé le **graphe** de la fonction f sur $\mathcal{D}$. C'est une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemple. 1)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

avec $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

- 2) Le graphe de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = x^2 + y^2$ est un paraboloïde de révolution.
- 3) Le graphe de la fonction h définie sur $\mathbb{R}^2$ par $h(x, y) = x^2 - y^2$ est un paraboloïde hyperbolique (selle de cheval).

1.2 Fonctions vectorielles de plusieurs variables

Définition 1.2 (Fonction vectorielle de plusieurs variables). Une **fonction vectorielle de n variables réelles** est une application définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ par p fonctions numériques $f_1, \dots, f_p$ définies sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. C'est-à-dire,

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} f_j : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f_j(x). \end{aligned}$$

Exemple. Soit $\Delta = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$, c'est exactement l'axe (Oz) . Soit la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 \setminus \Delta &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ X = (x, y, z) &\longmapsto f(X) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right). \end{aligned}$$

L'image par f de la sphère unité de $\mathbb{R}^3$ privée de ses deux pôles qui appartiennent à Δ est le cylindre d'axe Δ et de base le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

2 Limite et continuité

Définition 2.1 (Limite d'une fonction numérique). Soit f une fonction numérique de n variables réelles définie au voisinage d'un point $a = (a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, sauf peut-être en a .

1) On dit que la fonction f admet $l \in \mathbb{R}$ pour **limite** au point a et on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|x - a\| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon.$$

2) On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) au point a si

$$\forall A > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|x - a\| < \eta \implies f(x) > A \text{ (resp. } f(x) < -A).$$

Exemple. 1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$. On a $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} f(x, y) = 0$.

2) Soit $g : \mathbb{R} \times]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = -x^2 + \tan y$. On a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \pi/2^-)} g(x, y) = +\infty$.

Proposition 2.1 (Unicité de la limite). Si une fonction numérique de n variables réelles admet une limite en un point a , alors cette limite est unique.

Remarque. La proposition précédente est souvent utile pour montrer que la limite n'existe pas.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

<https://keepmath.com>

On remarque que

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

et

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 2t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^2}{5t^2} = \frac{2}{5},$$

alors f n'admet pas de limite au point $(0, 0)$.

Proposition 2.2 (Limite et suites). Soient $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de plusieurs variables et $l \in \mathbb{R}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$;

2) Pour toute suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ convergente vers a , la suite $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l , c'est-à-dire,

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a \implies f(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} l.$$

Définition 2.2 (Limite d'une fonction vectorielle). Soit

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{aligned}$$

une fonction vectorielle de n variables réelles définie au voisinage d'un point $a = (a_1, \dots, a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, sauf peut-être en a . Soit $l = (l_1, \dots, l_p) \in \mathbb{R}^p$.

On dit que la fonction f admet $l \in \mathbb{R}^p$ pour limite au point a et on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \eta \implies \|f(x) - l\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon.$$

Proposition 2.3. *Soit*

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ x = (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{aligned}$$

une fonction vectorielle de n variables réelles définie au voisinage d'un point a , sauf peut-être en a . Soit $l = (l_1, \dots, l_p) \in \mathbb{R}^p$. Alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ si, et seulement si, } \lim_{x \rightarrow a} f_j(x) = l_j \quad \forall j \in \{1, \dots, p\}.$$

Remarque. – *L'étude de la limite d'une fonction vectorielle est équivalente à étudier les limites de ses fonctions composantes.*

- *Les opérations algébriques sur limites des fonctions de plusieurs variables concernant la somme, la différence, le produit, le quotient et la composition sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions d'une seule variable réelle.*

Définition 2.3 (Continuité ponctuelle). 1) *Une fonction f définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{R}^p$) est dite **continue** au point a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.*

C'est-à-dire,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|x - a\|_{\mathbb{R}^n} < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

- 2) *On dit que la fonction f est continue sur un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ si elle est continue en tout point de A .*

Exemple. 1) *La fonction de projection $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $p_i(x) = x_i$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.*

- 2) *La fonction norme $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(x) = \|x\|$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.*

- 3) *Toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.*

Remarque. – *Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle définie par $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$. f est continue en $a \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, toutes les fonctions composantes f_j ($j = 1, \dots, p$) sont continues en a .*

- *Les opérations algébriques sur les fonctions continues de plusieurs variables concernant somme, différence, produit, quotient et composition sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions d'une seule variable réelle.*

Exemple. – *Une fonction polynôme à plusieurs variables est continue sur $\mathbb{R}^n$. Par exemple, $f(x, y, z) = x^2y + xyz^3 + xz^2$ est continue sur $\mathbb{R}^3$.*

- *Une fonction rationnelle de plusieurs variables est continue en tout point où le dénominateur ne s'annule pas.*
- *Les fonctions fabriquées à l'aide des fonctions usuelles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par composition et d'autres opérations algébriques, sont continues sur leurs ensembles de définition.*

Proposition 2.4 (Continuité et suites). *Une fonction $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in \mathcal{D}$ si, et seulement si, pour toute suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ qui converge vers a , la suite $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

Définition 2.4 (Prolongement par continuité). *Soit f une fonction numérique définie sur $\mathcal{D} \setminus \{a\} \subset \mathbb{R}^n$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$, on dit que f admet un **prolongement par continuité** défini par la fonction*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D} \setminus \{a\}, \\ l & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Définition 2.5 (Fonctions partielles). Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique et $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{D}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on pose

$$\mathcal{D}_i = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \mathcal{D}\} \subset \mathbb{R}.$$

Les fonctions réelles $f_1, \dots, f_n$ d'une seule variable définies par

$$\begin{aligned} f_i : \mathcal{D}_i &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f_i(t) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

sont appelées les **fonctions partielles** de f en a .

Proposition 2.5. Si $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{D}$, alors chaque fonction partielle f_i en a est continue en a_i .

Remarque. En général, la réciproque de la proposition précédente est fausse. En effet, soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Les fonctions partielles en $(0, 0)$ sont définies par $f_1(x) = f(x, 0)$ et $f_2(y) = f(0, y)$ et elles sont toutes les deux continues en $x = 0$ et $y = 0$ respectivement. Par contre, la fonction f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Définition 2.6 (Continuité uniforme). Une fonction $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dite **uniformément continue** sur $\mathcal{D}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \mathcal{D}, \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} < \eta \implies \|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon.$$

Exemple. Toute fonction Lipschitzienne est uniformément continue. Notons que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dite **Lipschitzienne** de rapport k s'il existe $k > 0$ telle que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque. Toute fonction uniformément continue sur $\mathcal{D}$ est continue sur $\mathcal{D}$, mais la réciproque est généralement fausse.

Proposition 2.6 (Propriétés des fonctions continues sur un compact). Soient E une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur E . Alors

- 1) f est uniformément continue sur E . (Théorème de Heine)
- 2) f est bornée sur E , c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq M, \forall x \in E$.
- 3) $f(E)$, l'image de f , est une partie compacte de $\mathbb{R}$.
- 4) La fonction f atteint ses bornes inférieure et supérieure, c'est-à-dire, il existe $a, b \in E$ tels que

$$\inf_{x \in E} f(x) = f(a) \quad \text{et} \quad \sup_{x \in E} f(x) = f(b).$$

3 Calcul différentiel

Dans toute la suite de ce chapitre, U désignera un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

Rappelons que pour une fonction réelle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, on dit que f est dérivable en $a \in I$ et on note $f'(a)$ sa dérivée en a si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

On écrit

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t) - f(a)}{t}.$$

3.1 Les dérivées partielles premières (ou d'ordre 1)

Soit f une fonction numérique définie sur U ($f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$). Soient $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ et X un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$.

On peut vérifier facilement que la fonction réelle de la variable réelle t définie par $\varphi(t) = f(a + tX)$ est bien définie sur un voisinage de 0.

Définition 3.1 (Dérivée directionnelle). 1) On dit que f admet une **dérivée au point a suivant le vecteur X** si la fonction φ est dérivable en 0. Lorsque $\varphi'(0)$ existe, on la note $D_X f(a)$ et on a

$$D_X f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tX) - f(a)}{t}.$$

2) Si $\|X\| = 1$, c'est-à-dire, $X \in S(0_{\mathbb{R}^n}, 1)$, alors $D_X f(a)$ est appelée la **dérivée directionnelle** de f en a suivant la direction X .

3) En particulier, si X est un vecteur unité dans la base canonique, c'est-à-dire, $X = e_i = (0, \dots, 0, 1, \dots, 0)$ alors $D_{e_i} f(a)$ n'est autre que la dérivée en a_i de f_i la i -ème fonction partielle de f en a .

$D_{e_i} f(a)$ est appelé la **dérivée partielle première** (ou d'ordre 1) de f au point a par rapport à la i -ème variable x_i . On la note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $D_i f(a)$.

Remarque. Pratiquement, le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ consiste à ne dériver l'expression de f que par rapport à la i -ème variable x_i et considérer les autres variables comme des constantes.

Exemple. Pour $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par <https://www.inepmath.com>

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2),$$

on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{2x}{x^2 + 2y^2 + 3z^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{4y}{x^2 + 2y^2 + 3z^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \frac{6z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2}.$$

Remarque. L'existence des dérivées partielles n'implique pas la continuité de la fonction. La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est un contre-exemple.

Définition 3.2 (Fonction de classe C^1). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variables. On dit que f est de **classe C^1** sur l'ouvert U et on écrit $f \in C^1(U)$ si f admet des dérivées partielles premières par rapport à toutes les variables en tout point de U et les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sont continues sur U .

3.2 La différentiabilité

Définition 3.3 (Différentiabilité d'une fonction numérique). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variables. On dit que f est **différentiable** en un point a de U s'il existe une forme linéaire v sur $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $a + h \in U$ on a

$$f(a + h) = f(a) + v(h) + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Autrement dit :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ a+h \in U}} \frac{f(a+h) - f(a) - v(h)}{\|h\|} = 0.$$

Remarque. 1) On utilise aussi l'écriture $f(a + h) = f(a) + v(h) + o(\|h\|)$.

2) La forme linéaire v s'appelle la **différentielle** de f en a et se note $df(a)$ (ou $d_a f$ ou $f'(a)$) et on écrit $df(a)(h) = v(h)$.

3) Cette forme linéaire $df(a)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$.

4) Si f est différentiable en tout point de U , on dit que f est différentiable sur U . Dans ce cas, la fonction notée df définie sur U par

$$df : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)', \quad x \mapsto df(x)$$

est appelée la fonction différentielle de f .

Proposition 3.1 (Unicité de la différentielle). Si f est différentiable au point a de U , alors $df(a)$ la différentielle de f en a est unique.

Exemple. 1) Toute fonction constante d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $f(x) = \alpha$ pour tout $x \in U$, est différentiable sur U et on a $df(x) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$ pour tout $x \in U$.

2) Toute forme linéaire f sur $\mathbb{R}^n$ est différentiable sur $\mathbb{R}^n$ et on a $df(x) = f, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Remarque. La notion de la différentiabilité généralise celle de la dérivabilité, c'est-à-dire, pour toute fonction réelle d'une seule variable les deux notions sont équivalentes.

Définition 3.4 (Différentiabilité d'une fonction vectorielle). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle de n variables à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

On dit que f est **différentiable** en un point a de U s'il existe une application linéaire continue v de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $a + h \in U$ on a

$$f(a + h) = f(a) + v(h) + \|h\|\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0_{\mathbb{R}^p}.$$

L'application linéaire continue $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ s'appelle la **différentielle** de f en a et se note $df(a)$ (ou $d_a f$ ou $f'(a)$) et on écrit $df(a)(h) = v(h) \in \mathbb{R}^p$.

Proposition 3.2. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle définie par $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$. f est différentiable en $a \in U$ si, et seulement si, chaque fonction composante f_j ($j \in \{1, \dots, p\}$) est différentiable en a et on a

$$df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad h \mapsto df(a)(h) = (df_1(a)(h), \dots, df_p(a)(h)).$$

Proposition 3.3. Soit f une fonction de plusieurs variables définie sur U . Si f est différentiable au point $a \in U$, alors f est continue en a .

Remarque. La réciproque de la proposition précédente est fausse.

Proposition 3.4. L'ensemble des fonctions différentiables en $a \in U$ est un espace vectoriel. C'est-à-dire, si f et g sont deux fonctions différentiables en a , alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la fonction $\alpha f + \beta g$ est différentiable en a et on a

$$d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha df(a) + \beta dg(a).$$

3.3 La relation entre la différentiabilité et les dérivées partielles

Proposition 3.5. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variables. Si f est différentiable au point $a \in U$, alors f admet en a une dérivée suivant n'importe quel vecteur X non nul de $\mathbb{R}^n$ et on a

$$D_X f(a) = df(a)(X).$$

Remarque. La réciproque de la proposition précédente est fausse.

Théorème 3.1. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variables. Si f est différentiable en $a \in U$, alors elle admet au point a des dérivées partielles premières par rapport à toutes les variables et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = df(a)(e_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

De plus, on a

$$df(a)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Remarque. 1) La réciproque du théorème précédent n'est pas toujours vraie, c'est-à-dire, l'existence de toutes les dérivées partielles premières n'est pas suffisante pour démontrer la différentiabilité de la fonction en a .

2) En utilisant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le symbole du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$ défini par $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, on peut représenter la différentielle d'une fonction numérique $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ en $a \in U$ sous la forme

$$df(a)(h) = \langle \text{grad } f(a), h \rangle = \langle \nabla f(a), h \rangle,$$

où $\text{grad } f(a) = \nabla f(a)$ appelé le **vecteur gradient** de f en a est défini par

$$\text{grad } f(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right).$$

3) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle définie par $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$. Si f est différentiable en $a \in U$, alors

$$df(a)(h) = (df_1(a)(h), \dots, df_p(a)(h)) \in \mathbb{R}^p, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

D'après le théorème précédent, on a $df_i(a)(h) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \cdot h_j$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$.

Donc on peut écrire $df(a)(h)$ comme le produit de la matrice, notée $\mathcal{J}_f(a) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et le vecteur h , c'est-à-dire, $df(a)(h) = \mathcal{J}_f(a) \cdot h$.

La matrice $\mathcal{J}_f(a)$ est la matrice associée à l'application linéaire $df(a)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. On l'appelle la **matrice Jacobienne** de f en a .

Dans le cas où $n = p$, le déterminant de la matrice Jacobienne est appelé le **Jacobien** de f en a .

Exemple. La fonction vectorielle $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ car ses fonctions composantes sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et sa matrice Jacobienne est donnée par

$$\mathcal{J}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Proposition 3.6. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique de n variables. Si f est de classe C^1 sur U , alors f est différentiable sur U .

Remarque. 1) Si f n'est pas différentiable alors elle n'est pas de classe C^1 même si elle admet des dérivées partielles.

2) La réciproque de la proposition précédente est fausse. La différentiabilité entraîne l'existence de toutes les dérivées partielles premières, mais elle n'assure pas leur continuité.

3.4 La différentiabilité d'une fonction composée

Lemme 3.1. Soit v une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Alors il existe $M > 0$ tel que

$$\|v(x)\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème 3.2 (Différentiabilité de la composée). Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et V un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$. Soit $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^q$ deux fonctions différentiables en $a \in U$ et $b = f(a) \in V$ respectivement.

Alors, la fonction composée $g \circ f$ est différentiable en a et on a

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

qu'on peut traduire en écriture matricielle

$$\mathcal{J}_{g \circ f}(a) = \mathcal{J}_g(f(a)) \cdot \mathcal{J}_f(a).$$

Corollaire 3.1 (Règle de dérivation en chaîne). Dans le cas particulier où $q = 1$, c'est-à-dire, si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset \mathbb{R}^p$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables en a et $f(a)$ respectivement, alors les dérivées partielles de $g \circ f$ en a sont données par

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a), \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Cette formule est appelée la **règle de dérivation en chaîne**.

3.5 Théorème des accroissements finis (T.A.F)

Rappel : Soit $f : [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une seule variable. Si f est continue sur $[\alpha, \beta]$ et dérivable sur $] \alpha, \beta[$, alors il existe $\gamma \in] \alpha, \beta[$ tel que

$$f(\beta) - f(\alpha) = f'(\gamma)(\beta - \alpha).$$

Théorème 3.3 (Théorème des accroissements finis). Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur U . Soient $a = (a_1, \dots, a_n)$ et $b = (b_1, \dots, b_n)$ deux points de U tels que $[a, b] \subset U$.

Si f est différentiable sur le segment ouvert $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i - a_i) = df(c)(b - a).$$

Remarque. Cette version du T.A.F ne s'applique pas pour les fonctions vectorielles $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ où $p > 1$.

Corollaire 3.2. Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U . Si la différentielle df est nulle sur U , alors f est constante sur U .

Théorème 3.4 (Théorème des accroissements finis - version générale). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soient a et b deux points de U tels que $[a, b] \subset U$. Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une fonction vectorielle continue sur $[a, b]$ et différentiable sur $]a, b[$ telle qu'il existe $k > 0$ vérifiant $\|df(x)\| \leq k$, $\forall x \in]a, b[$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq k\|b - a\|.$$

Remarque. D'après le Lemme sur les applications linéaires, on peut définir la norme d'une application linéaire v par

$$\|v\| = \sup_{x \neq 0_{\mathbb{R}^n}} \frac{\|v(x)\|}{\|x\|}.$$

3.6 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant sur U une dérivée partielle par rapport à la i -ème variable. Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \rightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée partielle par rapport à la j -ème variable au point $a \in U$, alors

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a)$$

est appelée une **dérivée partielle seconde** (ou d'ordre 2) au point a par rapport à la i -ème et j -ème variables prises dans cet ordre.

La dérivée partielle seconde $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a)$ est généralement notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a)$ ou $\partial_{x_j x_i} f(a)$.

En particulier, si $i = j$ on la note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (a)$.

D'une manière plus générale, en utilisant l'opérateur

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} \right),$$

on définit les dérivées partielles d'ordre supérieur.

Définition 3.5 (Fonction de classe C^k). Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de **classe** C^k sur U et on écrit $f \in C^k(U)$ si toutes ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égale à k existent et sont toutes continues sur U .

En particulier, si $f \in C^k(U)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe C^∞ sur U et on écrit $f \in C^\infty(U)$.

Théorème 3.5 (Théorème de Schwarz). Soit f une fonction définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont continues en $a \in U$. Alors, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (a).$$

En particulier, si $f \in C^2(U)$ alors l'égalité est vérifiée pour tout $a \in U$ et pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

3.7 La matrice Hessienne

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur $U \subset \mathbb{R}^n$. Si df la fonction différentielle de f est différentiable en $a \in U$, alors f est dite **deux fois différentiable** en a et la différentielle seconde, notée $d^2 f(a)$, est une application bilinéaire continue de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.

De plus, $d^2 f(a)$ est symétrique, c'est-à-dire,

$$d^2 f(a)(h, k) = d^2 f(a)(k, h), \quad \forall h, k \in \mathbb{R}^n.$$

La matrice associée à la forme bilinéaire $d^2 f(a)$ relativement à la base canonique est appelée la **Hessienne** de f en a et notée $\mathcal{H}_f(a)$.

Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\mathcal{H}_f(a) = (d^2 f(a)(e_i, e_j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$$

et on peut montrer que $d^2f(a)(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

Alors la Hessienne de f en a est la matrice suivante

$$\mathcal{H}_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}.$$

3.8 Formule de Taylor

Définition 3.6 (Notations multi-indices). Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ on utilise les notations suivantes :

- $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
- $\alpha! = \prod_{i=1}^n \alpha_i! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$.
- Lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, on dit que $\alpha \geq 0$ si $\alpha_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$.
- Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ tels que $\beta \leq \alpha$, c'est-à-dire $\beta_i \leq \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^n \binom{\alpha_i}{\beta_i}$.
- Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$.
- On définit l'opérateur différentielle D^α par

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Lemme 3.2. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p sur l'ouvert U . Alors la fonction réelle d'une seule variable φ définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(t) = f(a + th)$, où $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $[a, a + h] \subset U$, est de classe C^p sur $]0, 1[$ et pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ on a

$$\varphi^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha f(a + th) \cdot h^\alpha.$$

Théorème 3.6 (Formule de Taylor-Young à l'ordre p). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^p sur l'ouvert U . Si $a \in U$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $[a, a + h] \subset U$, alors

$$f(a + h) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) \cdot h^\alpha + o(\|h\|^p).$$

[Développement de Taylor d'ordre 2] Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U . Le développement de Taylor d'ordre 2 de f au voisinage de $a \in U$ s'écrit sous la forme suivante :

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} h^T \mathcal{H}_f(a) h + o(\|h\|^2),$$

où $\nabla f(a)$ est le vecteur gradient de f en a , $\mathcal{H}_f(a)$ est la Hessienne de f en a et h^T est la transposée du vecteur "colonne" h .

4 Extrema

Définition 4.1 (Extrema locaux et globaux). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

- 1) On dit que f admet un **minimum local** en $a \in U$ s'il existe un voisinage V de a tel que

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in V.$$

- 2) On dit que f admet un **minimum global** (ou absolu) en $a \in U$ si

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in U.$$

- 3) On dit que f admet un **maximum local** (resp. global) en $a \in U$ s'il existe un voisinage V de a tel que

$$f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in V \quad (\text{resp. } f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in U).$$

- 4) Ces extrema locaux (resp. globaux) deviennent **stricts** si les inégalités précédentes sont strictes sur $V \setminus \{a\}$ (resp. $U \setminus \{a\}$).

4.1 Condition nécessaire d'existence d'un extremum

Théorème 4.1 (Condition nécessaire). Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $a \in U$. Si f possède en a un extremum (local ou global), alors $df(a) = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$, ce qui signifie que toutes les dérivées partielles de f en a sont nulles, c'est-à-dire,

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Remarque. 1) Si $x_0 \in U$ tel que $df(x_0) = 0$, alors x_0 est appelé un **point critique** (ou stationnaire) de f .

- 2) Être un point critique de f est une condition nécessaire d'un extremum mais pas suffisante, c'est-à-dire, qu'on peut trouver un point critique pour lequel f ne possède pas d'extremum.
- 3) Les extrema d'une fonction différentiable, quand ils existent, sont à chercher parmi ses points critiques.

4.2 Condition suffisante d'existence d'un extremum

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U . Soit $a \in U$ un point critique de f , c'est-à-dire, $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Le développement de Taylor d'ordre 2 de f au voisinage de a est alors

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}h^T \mathcal{H}_f(a)h + o(\|h\|^2),$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$ et $\mathcal{H}_f(a)$ est la Hessienne de f en a qui est symétrique d'après le Théorème de Schwarz.

Théorème 4.2 (Condition suffisante). Soient $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur U et $a \in U$ un point critique de f .

- 1) Si toutes les valeurs propres λ_i de la Hessienne de f en a sont strictement positives, alors f admet un **minimum local strict** au point a .

- 2) Si toutes les valeurs propres λ_i de la Hessienne de f en a sont strictement négatives, alors f admet un **maximum local strict** au point a .

[Cas $n = 2$] Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Avec les notations de Monge suivantes :

$$p = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad q = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a), \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a),$$

et en utilisant le fait que $\det(\mathcal{H}_f(a)) = pr - q^2 = \lambda_1 \lambda_2$ et $\text{tr}(\mathcal{H}_f(a)) = p + r = \lambda_1 + \lambda_2$, on obtient les cas suivants :

- Si $pr - q^2 > 0$ et $p > 0$, alors f admet en a un **minimum local strict**.
- Si $pr - q^2 > 0$ et $p < 0$, alors f admet en a un **maximum local strict**.
- Si $pr - q^2 < 0$, alors f n'admet aucun extremum en a , mais elle possède un **point selle** en a .
- Si $pr - q^2 = 0$, alors dans ce cas on ne peut conclure a priori.

5 Difféomorphismes et Théorème des fonctions implicites

5.1 Difféomorphismes

Définition 5.1 (Difféomorphisme). Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une fonction $f : U \rightarrow V$ est un **difféomorphisme de classe C^k** ou C^k -difféomorphisme si elle satisfait les conditions suivantes :

- 1) f est bijective de U dans V ;
- 2) f est de classe C^k sur U ;
- 3) f^{-1} est de classe C^k sur V .

Remarque. Si $k = 0$, c'est-à-dire, f et f^{-1} sont seulement continues, on dit que f est un **homéomorphisme**.

Proposition 5.1. Si $f : U \rightarrow V$ est un C^k -difféomorphisme, alors sa différentielle $df(a)$ au point $a \in U$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire, $\det \mathcal{J}_f(a) \neq 0$.

La fonction réciproque de cette différentielle n'est autre que la différentielle de f^{-1} en $f(a)$, c'est-à-dire,

$$df^{-1}(f(a)) = (df(a))^{-1}.$$

En utilisant les matrices Jacobiennes, on peut traduire cette relation en écriture matricielle sous la forme

$$\mathcal{J}_{f^{-1}}(b) = (\mathcal{J}_f(f^{-1}(b)))^{-1}, \quad \forall b \in V.$$

Théorème 5.1 (Théorème d'inversion locale). Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : U \rightarrow V$ une fonction de classe C^k sur U .

S'il existe $a \in U$ tel que $df(a)$ est un isomorphisme (c'est-à-dire $\det \mathcal{J}_f(a) \neq 0$), alors il existe un voisinage ouvert U_a de a dans U et un voisinage ouvert V_b de $b = f(a)$ dans V tel que la restriction de f à U_a soit un C^k -difféomorphisme de U_a dans V_b .

Corollaire 5.1 (Théorème d'inversion globale). Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^k sur U . f est un C^k -difféomorphisme de U dans $f(U)$ si, et seulement si, f est injective et sa différentielle en tout point de U est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

5.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 5.2 (Cas de $\mathbb{R}^2$). Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(a, b) \in U$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k sur U .

Si $f(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$, alors il existe un voisinage I de a , un voisinage J de b (I et J sont des intervalles ouverts contenant a et b respectivement) et une fonction $\varphi : I \rightarrow J$ de classe C^k sur I vérifiant

$$1) \quad I \times J \subset U \text{ et } \varphi(a) = b;$$

$$2) \quad f(x, \varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in I;$$

$$3) \quad \varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}.$$

Remarque. On peut exprimer la condition ii) de la façon suivante :

$$ii') \quad \text{Pour tout } x \in I, \quad f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x).$$

Exemple. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = e^{y-1} + y - x$.

Montrer que la relation $f(x, y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage du point $(2, 1)$.

$$\text{On a } f(2, 1) = e^0 + 1 - 2 = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = e^0 + 1 = 2 \neq 0.$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe une fonction φ définie au voisinage de 2 telle que $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Théorème 5.3 (Cas de $\mathbb{R}^n$). Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ et $f : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe C^k sur U .

Soit $(a, b) \in U$ tel que $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $b \in \mathbb{R}$.

Si $f(a, b) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$, alors il existe un voisinage V de a , un voisinage W de b (W est un intervalle ouvert contenant b) et une fonction $\varphi : V \rightarrow W$ de classe C^k sur V vérifiant

$$1) \quad V \times W \subset U \text{ et } \varphi(a) = b;$$

$$2) \quad f(x, \varphi(x)) = 0, \quad \forall x \in V;$$

$$3) \quad \nabla \varphi(x) = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x, \varphi(x)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}}(x, \varphi(x))\right)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\}.$$