

Séries de Fourier

1 Introduction

Pour illustrer cette notion, on commencera par un exemple.

Soit $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ une série qui a pour rayon de convergence $R > 1$. Il est clair qu'en posant $z = e^{it}$, $t \mapsto \sum_{k \geq 0} a_k e^{ikt}$ est une fonction continue 2π -périodique.

Réciproquement, soit f une fonction 2π -périodique ayant suffisamment de qualités pour que l'égalité suivante ait un sens :

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

On appellera désormais $c_n(f)$ les **coefficients de Fourier** de f et par suite

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{int}$$

s'appelle la **série de Fourier** de f , notée $SF(f)$.

Maintenant, si f est une fonction 2π -périodique, il est naturel de se poser la question si on peut l'approcher par une série trigonométrique (qui converge vers f). À première vue, la série la plus raisonnable qui pourrait être candidate, si jamais ceci est vrai, est la série de Fourier de f , $SF(f)$. Cependant, comme la convergence uniforme n'est pas toujours assurée et même la convergence point par point est parfois peut ne pas être réalisable; il s'ensuit que $SF(f)$ risque de ne pas converger vers f . En fait, la série de Fourier d'une fonction continue f ne converge pas uniformément vers f ; pire encore, elle peut diverger sur un ensemble très gros.

On est alors devant une difficulté énorme si la série candidate $SF(f)$, qui a été choisie pour représenter f , ne converge même pas vers f . Comment sera alors cette représentation de f par une série formée de fonctions périodiques?

Avant d'essayer de résoudre ce problème, il faut noter que si une série converge vers une fonction dans un certain sens, la fonction peut être intégrée ou dérivée (par terme à terme de la série). Il serait donc, peut-être, possible pour qu'une série soit manipulée dans ce sens même si la série diverge en certains points. Noter qu'une représentation peut ne pas être point par point ou uniforme, néanmoins elle restera intéressante à étudier.

En fait, les sommes de Césaro d'une série de Fourier de f convergent uniformément vers f même si la série de Fourier $SF(f)$ est divergente.

On pose :

$$s_n(t) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)),$$

avec

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt.$$

Féjer (1900) a montré que la suite de fonctions $(\sigma_n)_n$ converge uniformément vers f , où

$$\sigma_n(t) := \frac{s_0(t) + \cdots + s_n(t)}{n+1}.$$

Noter que

$$\sigma_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t+u) + f(t-u)) K_n(u) du,$$

avec

$$K_n(u) := \frac{1}{2(n+1)} \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}u\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \right)^2 \quad (\text{noyau de Féjer}).$$

2 Coefficients de Fourier

Lemme 2.1 (Propriétés d'orthogonalité). 1) Si $k \neq j$, vérifier que pour tout i on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt) \sin(jt) dt = 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \sin(it) dt.$$

2) Montrer que pour $i, k \neq 0$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(kt)^2 dt = \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(it)^2 dt.$$

2.1 Passage de la forme trigonométrique à la forme exponentielle

Comment passer de

$$S = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

à

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int}$$

et vice versa?

Rappelons que :

$$\cos(nt) := \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}, \quad \sin(nt) := \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}.$$

Par suite,

$$S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int},$$

avec

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n \geq 1.$$

Réciproquement, si on a $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$ et en utilisant les formules :

$$e^{int} = \cos(nt) + i \sin(nt), \quad \cos(-nt) = \cos(nt), \quad \sin(-nt) = -\sin(nt),$$

on aura

$$S = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)),$$

avec

$$a_0 := 2c_0, \quad a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad n \geq 1.$$

Maintenant, sachant que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)t} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k, \\ 2\pi & \text{si } n = k, \end{cases}$$

on a alors :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt,$$

$$a_0 = 2c_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt,$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt,$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad n \geq 1.$$

2.2 Lemmes utiles

Lemme 2.2. Si F est une fonction p -périodique. Alors,

$$\int_a^{a+p} F(t) dt = \int_0^p F(t) dt,$$

chaque fois que ceci est possible.

Démonstration.

$$\int_a^{a+p} F(t) dt - \int_0^p F(t) dt = \int_a^0 F(t) dt + \int_0^p F(t) dt + \int_p^{a+p} F(t) dt - \int_0^p F(t) dt.$$

Le changement de variable $u = t - p$ donne $\int_p^{a+p} F(t) dt = \int_0^a F(u) du$.

Par suite, $\int_a^{a+p} F(t) dt = \int_0^p F(t) dt$. □

Lemme 2.3.

$$\int_{-a}^a F(t) dt = \begin{cases} 2 \int_0^a F(t) dt & \text{si } F \text{ est paire,} \\ 0 & \text{si } F \text{ est impaire.} \end{cases}$$

Lemme 2.4. – Si f est paire, on a :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n \equiv 0.$$

– Si f est impaire, on a :

$$a_n \equiv 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt.$$

<https://keepmath.com>

2.3 Exemples

Exemple. Soit f une fonction 2π -périodique donnée par $f(t) = |t|$ pour $|t| \leq \pi$.

Comme f est paire, les coefficients de Fourier de $SF(f)$ sont :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n \equiv 0.$$

Pour $n = 0$, on a :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t dt = \pi.$$

Pour $n > 0$, on a :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t \sin(nt)}{n} + \frac{\cos(nt)}{n^2} \right]_0^\pi = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2}.$$

Donc,

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ est impaire.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$SF(f) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos((2k-1)t)}{(2k-1)^2}.$$

Remarquer que cette série converge absolument par comparaison avec la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exemple. Soit g une fonction 2π -périodique donnée par $g(t) = t$ pour $-\pi < t < \pi$.
 g est impaire. Donc $a_n = 0$.
 Calculons les c_n . Si $n = 0$, on a :

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \, dt = 0.$$

Et pour $n \neq 0$, on a :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{-int} \, dt = \frac{(-1)^{n+1} i}{n}.$$

Par suite,

$$SF(g) = \sum_{n \neq 0} \frac{(-1)^{n+1} i}{n} e^{int}.$$

En rassemblant les termes, on obtient :

$$SF(g) = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt).$$

3 Inégalité de Bessel

Soit

$$S_N^f(x) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}.$$

On a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{int} \right|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{n=-N}^N |c_n|^2.$$

On a donc pour tout N :

$$\sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Par suite,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Avec les a_n, b_n , on aura :

$$|a_n|^2 + |b_n|^2 = a_n \bar{a}_n + b_n \bar{b}_n = (c_n + c_{-n})(\bar{c}_n + \bar{c}_{-n}) + i(c_n - c_{-n})(-i)(\bar{c}_n - \bar{c}_{-n}) = 2c_n \bar{c}_n + 2c_{-n} \bar{c}_{-n}.$$

D'où :

$$|a_0|^2 = 4|c_0|^2, \quad |a_n|^2 + |b_n|^2 = 2(|c_n|^2 + |c_{-n}|^2), \quad n \geq 1.$$

Donc,

$$\frac{1}{4}|a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Il s'ensuit que les séries $\sum |a_n|^2$, $\sum |b_n|^2$, $\sum |c_n|^2$ sont convergentes.

Proposition 3.1. Les suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$ convergent vers 0.

4 Fonctions par morceaux

Définition 4.1. 1) On dit que f est C^0 par morceaux sur $[a, b]$ si :

- 1) f est continue sur $[a, b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points $x_1, \dots, x_n$,
- 2) $f(x_k^-) := \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_k - h)$ et $f(x_k^+) := \lim_{h \rightarrow 0^+} f(x_k + h)$ existent.

Cette classe de fonctions est notée par $CM[a, b]$.

2) On dit que f est C^1 par morceaux sur $[a, b]$ si :

- 1) $f \in CM[a, b]$,
- 2) f' est continue sur $[a, b]$ sauf peut-être en un nombre fini de points $x_1, \dots, x_n$ où $f'(x_k^-), f'(x_k^+)$ existent (même pour $f'(a^+), f'(b^-)$).

Cette classe de fonctions est notée par $C^1M[a, b]$.

Exemple. On pose $CM(\mathbb{R}) := \bigcup_{a < b} CM[a, b]$, $C^1M(\mathbb{R}) := \bigcup_{a < b} C^1M[a, b]$.

5 Convergence des séries de Fourier

On pose :

$$S_N^f(t) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{int}.$$

Notre but est de montrer que $S_N^f(x) \rightarrow f(x)$ quand $N \rightarrow +\infty$.

On sait que $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$.

Donc,

$$\begin{aligned} S_N^f(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in(t-\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\phi) \sum_{n=-N}^N e^{in\phi} d\phi. \end{aligned}$$

Donc,

$$S_N^f(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+\phi) D_N(\phi) d\phi,$$

avec

$$D_N(\phi) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N e^{in\phi} \quad (\text{noyau de Dirichlet}).$$

Vérifier que

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((N + \frac{1}{2})\phi)}{\sin(\frac{\phi}{2})}.$$

Lemme 5.1. Pour tout N , on a

$$\int_{-\pi}^0 D_N(t) dt = \int_0^{\pi} D_N(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Théorème 5.1 (Convergence des séries de Fourier). *Si f est une fonction 2π -périodique et C^1 par morceaux.*

Alors pour tout t , on a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N^f(t) = \frac{1}{2}(f(t^-) + f(t^+)).$$

En particulier, $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N^f(t) = f(t)$ en tout point de continuité de f .

5.1 Applications

Exemple.

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos(2k-1)t}{(2k-1)^2} = |t| = f(t)$$

est C^1 par morceaux en tout point t dans $[-\pi, \pi]$.

Exemple. $t = k\pi$ est un point de discontinuité de g et on a $g(k\pi^-) = \pi$, $g(k\pi^+) = -\pi$.

Par suite,

$$\frac{1}{2}(g(k\pi^-) + g(k\pi^+)) = 0.$$

Alors $SF(g)$ converge en tout point $t \neq k\pi$ (avec k impair) vers $g(t)$ sauf en $t = k\pi$ (avec k impair) où elle converge vers 0.

Autrement dit,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\theta) = \frac{\theta}{2}, \quad -\pi < \theta < \pi.$$

<https://keepmath.com>

Pour $\theta = 0$ dans l'exemple 1, on a :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans l'exemple 2, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Corollaire 5.1. *Si f, g sont 2π -périodiques et C^1 par morceaux telles que $SF(f) = SF(g)$, alors f et g sont deux fonctions identiques.*