

Calculs des intégrales doubles et triples

1 Rappel : Intégrale d'une fonction à une seule variable

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) **1er cas :** Si f est en escalier, c'est-à-dire, il existe une subdivision $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ telle que f est constante ($f(x) = c_i$) sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$, alors

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(t_{i+1} - t_i).$$

- 2) **2ème cas :** Si f est bornée, on l'approche par des fonctions en escalier.

Définition 1.1 (Fonction intégrable). Une fonction bornée $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est **intégrable** sur $[a, b]$ s'il existe un réel unique I tel que pour toute fonction en escalier u et v sur $[a, b]$ vérifiant $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$, on a

$$\int_a^b u(x) dx \leq I \leq \int_a^b v(x) dx,$$

et de plus, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des fonctions en escalier u_ε et v_ε vérifiant $u_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq v_\varepsilon(x)$ et

$$0 \leq \int_a^b v_\varepsilon(x) dx - \int_a^b u_\varepsilon(x) dx < \varepsilon.$$

Le réel I est appelé l'**intégrale** de f sur $[a, b]$ et noté $\int_a^b f(x) dx$.

<https://keepmath.com>

Remarque. 1) Si la fonction f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx$ représente l'aire sous la courbe de f au-dessus de $[a, b]$.

2) Si la fonction f est continue sur $[a, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$.

3) Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a, b]$, alors pour tous réels α et β on a

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

2 Intégrales doubles

2.1 Intégration sur un rectangle de $\mathbb{R}^2$

Soit $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle dans $\mathbb{R}^2$. Soit f une fonction définie sur $\mathcal{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$.

- 1) **1er cas :** Si f est en escalier, c'est-à-dire, il existe une partition de $[a, b] \times [c, d]$ par des subdivisions

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

et

$$s_0 = c < s_1 < s_2 < \dots < s_{m-1} < s_m = d$$

telle que f est constante ($f(x, y) = c_{ij}$) à l'intérieur de chaque rectangle $]t_i, t_{i+1}[\times]s_j, s_{j+1}[$.

Définition 2.1 (Intégrale double d'une fonction en escalier). *L'intégrale double de la fonction en escalier f sur le rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ est définie par*

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} c_{ij} (t_{i+1} - t_i) \cdot (s_{j+1} - s_j).$$

Remarque. *La valeur de l'intégrale $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$ ne dépend pas des valeurs de f sur les bords des petits rectangles $[t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$.*

- 1) **2ème cas :** Si f est bornée sur $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$, on l'approche par des fonctions en escalier.

Définition 2.2 (Intégrabilité sur un rectangle). *On dit qu'une fonction bornée $f : \mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ est **intégrable** sur le rectangle $\mathcal{R}$ s'il existe un réel unique I tel que pour toutes fonctions en escalier u et v définies sur $\mathcal{R}$, telles que $u(x, y) \leq f(x, y) \leq v(x, y)$, on a*

$$\iint_{\mathcal{R}} u(x, y) dx dy \leq I \leq \iint_{\mathcal{R}} v(x, y) dx dy,$$

et de plus, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions en escalier u_ε et v_ε vérifiant

$$u_\varepsilon(x, y) \leq f(x, y) \leq v_\varepsilon(x, y)$$

et

$$0 \leq \iint_{\mathcal{R}} v_\varepsilon(x, y) dx dy - \iint_{\mathcal{R}} u_\varepsilon(x, y) dx dy < \varepsilon.$$

Le réel I s'appelle l'**intégrale double** de f sur $\mathcal{R}$ et se note $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$.

Théorème 2.1. 1) Si la fonction f est positive sur $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$, alors $\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy$ représente le volume sous le graphe de f au-dessus de $\mathcal{R}$.

- 2) Si la fonction f est continue sur le rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$, alors f est intégrable sur $\mathcal{R}$.

Proposition 2.1 (Propriétés de l'intégrale double). 1) Si f et g sont deux fonctions intégrables sur le rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$, alors pour tous réels α et β on a

$$\iint_{\mathcal{R}} (\alpha f + \beta g)(x, y) dx dy = \alpha \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy + \beta \iint_{\mathcal{R}} g(x, y) dx dy.$$

- 2) Si on disjoint le rectangle $\mathcal{R}$ en une partition de deux rectangles $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, c'est-à-dire, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ avec $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$, alors

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{R}_1} f(x, y) dx dy + \iint_{\mathcal{R}_2} f(x, y) dx dy.$$

2.2 Calcul des intégrales doubles sur un rectangle

Théorème 2.2 (Théorème de Fubini). Soit f une fonction continue sur le rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$. Alors

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Remarque. En particulier, si f est un produit de deux fonctions g et h d'une seule variable, c'est-à-dire, $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$, alors

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right).$$

Exemple. Pour $\mathcal{R} = [-1, 0] \times [0, 1]$ et $f(x, y) = x^2 + y^2$, on a

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2) dx dy &= \int_{-1}^0 \left(\int_0^1 (x^2 + y^2) dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x \right]_{-1}^0 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Exemple. Pour $\mathcal{R} = [0, 1] \times [1, 2]$ et $f(x, y) = e^{x+y}$, on a

$$\begin{aligned} \iint_{[0,1] \times [1,2]} e^{x+y} dx dy &= \iint_{[0,1] \times [1,2]} e^x e^y dx dy \\ &= \int_0^1 e^x dx \int_1^2 e^y dy = e(e-1). \end{aligned}$$

2.3 Intégration sur une partie bornée de $\mathbb{R}^2$

Soit $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie bornée non-rectangulaire $\mathcal{D}$. On considère un rectangle $\mathcal{R}$ tel que $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$ et on définit la fonction $\tilde{f}$ sur $\mathcal{R}$ par

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in \mathcal{D}, \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin \mathcal{D}. \end{cases}$$

On pose

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \iint_{\mathcal{R}} \tilde{f}(x, y) dx dy.$$

On peut se ramener à deux types de domaine $\mathcal{D}$:

– **Type 1 :**

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\},$$

où g_1 et g_2 sont deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

– **Type 2 :**

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \text{ et } h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

où h_1 et h_2 sont deux fonctions continues de $[c, d]$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.3 (Théorème de Fubini sur un domaine borné). Soit f une fonction continue sur une partie bornée $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. Alors f est intégrable sur $\mathcal{D}$ et on a deux cas :

1) Si le domaine d'intégration $\mathcal{D}$ est de type 1, alors

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

2) Si le domaine d'intégration $\mathcal{D}$ est de type 2, alors

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Remarque. 1) Le choix d'intégrer d'abord par rapport à x ou par rapport à y peut amener des calculs plus ou moins longs.

2) L'aire d'un domaine borné de $\mathbb{R}^2$ est donnée par

$$A(\mathcal{D}) = \text{aire}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} 1 \, dx \, dy.$$

2.4 Intégrale double et changement de variables

Rappel : Pour une fonction d'une seule variable intégrable sur $[a, b]$, on a

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_c^d f(g(t))g'(t) \, dt,$$

où g est une bijection de $[c, d]$ sur $[a, b]$.

Théorème 2.4 (Changement de variables en dimension 2). Soit

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto (x, y) = \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \end{aligned}$$

une fonction injective et de classe C^1 sur $\mathcal{D}$ telle que $\det(\mathcal{J}_\varphi(u, v)) \neq 0$, où $\mathcal{J}_\varphi(u, v)$ est la matrice Jacobienne de φ définie par

$$\mathcal{J}_\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}.$$

Si f est une fonction intégrable sur $\varphi(\mathcal{D})$, alors

$$\iint_{\varphi(\mathcal{D})} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}} f \circ \varphi(u, v) |\det(\mathcal{J}_\varphi(u, v))| \, du \, dv.$$

2.5 Changement en coordonnées polaires

Si la fonction f ou le domaine d'intégration sont exprimés en fonction de $x^2 + y^2$, alors le calcul d'intégrale est souvent plus facile en passant en **coordonnées polaires**, via l'application injective de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) &\longmapsto \varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y) \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a

$$\det(\mathcal{J}_\varphi(r, \theta)) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

Alors

$$\iint_{\varphi(\mathcal{D})} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\mathcal{D}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta.$$

Exemple. Calculons l'intégrale $I = \iint_A xy \, dx \, dy$ où

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

On a $A = \varphi(B)$ où

$$B = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[: 0 < r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

Alors

$$\begin{aligned} I &= \iint_A xy \, dx \, dy = \iint_{\varphi(B)} xy \, dx \, dy \\ &= \iint_B (r \cos \theta)(r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \iint_{[0,1] \times [0,\pi/2]} r^3 \sin(2\theta) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 r^3 \, dr \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) \, d\theta = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

3 Intégrales triples

On définit et on calcule les intégrales pour les fonctions de trois variables (et plus...) de manière totalement similaire et on note l'intégrale triple d'une fonction f sur une partie bornée A de $\mathbb{R}^3$ par

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

3.1 Théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^3$

Le théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^3$ permet de ramener le calcul d'une intégrale triple à celui d'une intégrale double et ainsi, grâce au même théorème énoncé dans $\mathbb{R}^2$, à celui d'intégrales simples.

Théorème 3.1 (Théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^3$). *Soit*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in B \subset \mathbb{R}^2 \text{ et } g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\},$$

où B est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$ et les fonctions g_1 et g_2 sont continues sur B .

Si f est une fonction intégrable sur A , alors

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_B \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx \, dy.$$

De plus, si

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \text{ et } \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

Remarque. 1) Il peut avoir différentes formulations suivant la forme du domaine d'intégration A . On peut procéder dans l'ordre des variables que l'on veut, toutes donnant le même résultat.

2) En particulier, si $f(x, y, z) = 1$ sur A , l'intégrale $\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz$ représente alors le volume de A .

Exemple. Soit $A = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x + y + z \leq 1\}$.

Calculons $\iiint_A \frac{1}{(1+x+y+z)^2} dx dy dz$.

Le domaine d'intégration peut être exprimé comme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y\}.$$

D'après le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \iiint_A \frac{1}{(1+x+y+z)^2} dx dy dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^2} dz \right) dy \right) dx \\ &= \frac{3}{4} - \ln 2. \end{aligned}$$

D'autre part, le volume du domaine A peut être calculé comme suit,

$$\mathcal{V}(A) = \iiint_A 1 dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{6}.$$

3.2 Changement de variables dans $\mathbb{R}^3$

Théorème 3.2 (Changement de variables en dimension 3). Soit

$$\begin{aligned} \varphi : A \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, w) &\longmapsto (x, y, z) = \varphi(u, v, w) \end{aligned}$$

une fonction injective de classe C^1 sur A telle que $\det \mathcal{J}_\varphi(u, v, w) \neq 0$, où $\mathcal{J}_\varphi$ est la matrice Jacobienne de φ .

Si f est une fonction intégrable sur $B = \varphi(A)$, alors

$$\iiint_{\varphi(A)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f \circ \varphi(u, v, w) |\det(\mathcal{J}_\varphi(u, v, w))| du dv dw.$$

3.3 Coordonnées cylindriques

Les **coordonnées cylindriques** d'un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont définies par le changement de variables via l'application injective de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) &\longmapsto (x, y, z) = \varphi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a

$$\mathcal{J}_\varphi(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\det(\mathcal{J}_\varphi(r, \theta, z)) = r.$$

Alors

$$\iiint_{\varphi(A)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

3.4 Coordonnées sphériques

Les **coordonnées sphériques** d'un point $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sont définies par le changement de variables via l'application injective de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times [0, \pi[$ définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times [0, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \phi) &\longmapsto (x, y, z) = \varphi(r, \theta, \phi) = (r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a

$$\mathcal{J}_\varphi(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi & -r \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & r \cos \theta \sin \phi & r \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -r \sin \phi \end{pmatrix}$$

et

$$|\det(\mathcal{J}_\varphi(r, \theta, \phi))| = r^2 \sin \phi.$$

Alors

$$\iiint_{\varphi(A)} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_A f(r \cos \theta \sin \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \phi) r^2 \sin \phi \, dr \, d\theta \, d\phi.$$

4 Exercices

- 1) Calculer $I = \iiint_A \frac{z}{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$ où

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}.$$

<https://keepmath.com>

- 2) Calculer le volume d'une boule de $\mathbb{R}^3$ de rayon r .

- 3) Calculer $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

- 4) Calculer le volume du domaine D délimité par la sphère de rayon a et les plans $z = b$ et $z = -b$ avec $0 < b < a$.

- 1) Pour $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq z \leq 1\}$.

En coordonnées cylindriques, on a

$$A = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}.$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_A \frac{z}{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{z}{r^2} r \, dz \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{z}{r} \, dz \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2r} \, d\theta \, dr = \pi \int_0^1 \frac{1}{r} \, dr = +\infty. \end{aligned}$$

L'intégrale diverge (problème en $r = 0$).

2) Volume d'une boule de rayon R :

En coordonnées sphériques,

$$B = \{(r, \theta, \phi) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \iiint_B 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \, dr \\ &= \int_0^R r^2 \, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \\ &= \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

3) $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

En coordonnées polaires,

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 \cdot r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

4) Volume du domaine délimité par la sphère de rayon a et les plans $z = b$ et $z = -b$ avec $0 < b < a$.

Le domaine est

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, -b \leq z \leq b\}.$$

En coordonnées cylindriques,

$$D = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{a^2 - z^2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -b \leq z \leq b\}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{-b}^b \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= \int_{-b}^b \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - z^2}{2} \, d\theta \, dz = \pi \int_{-b}^b (a^2 - z^2) \, dz \\ &= \pi \left[a^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-b}^b = \pi \left(2a^2 b - \frac{2b^3}{3} \right) = \frac{2\pi b}{3} (3a^2 - b^2). \end{aligned}$$