

Analyse Complexe

1 Introduction

Quand la notion de la limite d'une fonction réelle est maîtrisée, on passe à une première conséquence qui est la notion de la continuité et de la dérivabilité.

Ceci étant, quand une fonction est dérivable, on peut recommencer le même processus de la dérivabilité pour la fonction dérivée et ainsi de suite... Une question s'impose alors : Jusqu'à quel degré peut-on dériver une fonction donnée et sa dérivée reste-t-elle toujours continue? Aussi pour une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, peut-on savoir, sur un domaine donné, si f est limite de sa série de Taylor?

Généralisant la définition de la dérivabilité à deux variables, c'est-à-dire pour les fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}^2$, on se heurte alors à ces mêmes questions. Notons ici que $\mathbb{R}^2$ est considéré comme $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Aussi bien dans le cas de $\mathbb{R}$ que de $\mathbb{R}^2$, la réponse aux questions précitées est fortement liée à la fonction elle-même ainsi qu'au domaine sur lequel cette fonction est définie.

Cependant, si on regarde $\mathbb{R}^2$ comme étant le corps des nombres complexes noté $\mathbb{C}$, la dérivabilité des fonctions $f : \mathbb{C} \rightarrow X$ (X espace normé) devient magiquement bonne, ce qui répond positivement aux deux questions déjà posées ci-dessus : Si une fonction est dérivable une seule fois, toutes ses dérivées le seront toujours, et sous ces hypothèses elle est alors localement la limite de sa série de Taylor.

Ceci n'étant qu'une seule raison parmi tant d'autres... c'est ainsi que l'étude des fonctions complexes a pris un intérêt important pour les analystes.

2 Fonctions holomorphes

<https://keepmath.com>

Définition 2.1 (Fonction holomorphe). Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \rightarrow X$, où X est un espace de Banach.

On dira que f est **dérivable au sens complexe** au point z_0 (ou **holomorphe** au point z_0) lorsque

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. On notera cette limite par $f'(z_0)$.

Exemple. 1) $f(z) = z$ est holomorphe en tout point de $\mathbb{C}$. En effet,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{z - z_0} = 1.$$

Par suite, $f'(z) = 1$.

2) $f(z) = z^2$ est holomorphe en tout point de $\mathbb{C}$. En effet,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0.$$

Par suite, $f'(z) = 2z$.

3 Conditions de Cauchy-Riemann

Proposition 3.1 (Conditions de Cauchy-Riemann). Soit $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow X$ et $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow X$ définie par

$$\tilde{f}(x, y) = f(x + iy), \quad \text{où } x + iy \in U.$$

Alors, f est holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si $\tilde{f}$ est différentiable en (x_0, y_0) .
De plus,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

et

$$f'(z_0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Démonstration.

Supposons que f soit holomorphe en $z_0 = x_0 + iy_0$. Il s'ensuit alors que :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0) - (z - z_0)f'(z_0)}{z - z_0} \right) = 0.$$

Par suite,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \neq (x_0,y_0)}} \left(\frac{\tilde{f}(x,y) - \tilde{f}(x_0,y_0) - (x - x_0)f'(z_0) - i(y - y_0)f'(z_0)}{\|(x,y) - (x_0,y_0)\|_2} \right) = 0.$$

Donc,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(z_0), \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = if'(z_0).$$

C'est-à-dire,

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Pour la réciproque, supposons que $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow X$ soit différentiable et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann au point (x_0, y_0) :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Définir $f : U \rightarrow X$ par $f(z) = \tilde{f}(x, y)$, où $z = x + iy$.

Il s'ensuit alors que $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, où $\bar{z} = x - iy$ est le conjugué de z .

Par suite,

$$f(z) = \tilde{f}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right).$$

Tout d'abord, il faut s'assurer que f ne dépend pas de $\bar{z}$.

En effet,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \cdot \left(-\frac{1}{2i}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right) = 0.$$

Donc f ne dépend pas de $\bar{z}$.

Maintenant,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} - i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}.$$

D'où $f'(z_0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(z_0)$. Ceci montre que f est holomorphe en z_0 . □

3.1 Exercices

- 1) Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\tilde{U} = \{(x, y) : z = x + iy \in U\}$. Montrer que U et $\tilde{U}$ sont homéomorphes.
- 2) Soient $U \xrightarrow{h} V \xrightarrow{k} X$ telles que h est holomorphe en $z_0 \in U$ et k est holomorphe en $h(z_0)$. Montrer que $k \circ h$ est holomorphe en z_0 et on a :

$$(k \circ h)'(z_0) = k'(h(z_0)) \cdot h'(z_0).$$

- 3) Montrer que si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en (x, y) , et $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, alors u, v vérifient :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

- 4) Montrer que les seules fonctions holomorphes de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes.
- 5)
 - 1) Montrer que $f(x, y) = \|(x, y)\|_2$ n'est pas différentiable au point $(0, 0)$.
 - 2) En déduire que $f(z) = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$ n'est pas holomorphe au point 0.
 - 3) Est-ce que $f(z)$ est holomorphe en $z_0 \neq 0$?
 - 4) Est-ce que $g(z) = \bar{z}$ est holomorphe? Justifier.
 - 5) Est-ce que $z \mapsto \log |z|$ est holomorphe?
 - 6) Est-ce que $z \mapsto \text{Arg}(z)$ est holomorphe?

4 Fonctions harmoniques

Définition 4.1 (Laplacien et fonctions harmoniques). On définit le **Laplacien** Δ par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Une fonction f qui vérifie $\Delta f = 0$ est dite **harmonique**.

Proposition 4.1. Si f vérifie les conditions de Cauchy-Riemann, alors f est harmonique.

Proposition 4.2 (Laplacien en coordonnées polaires). Soit $u(x, y)$ une fonction réelle. Alors Δu , en coordonnées polaires, est donné par :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Ou encore,

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \left(r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) = \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right).$$

5 Séries de Taylor

Dans toute la suite, $(X, \|\cdot\|)$ désignera un espace de Banach.

Définition 5.1 (Série de Taylor). Soit $(c_p)_{p \geq 0}$ une suite dans $(X, \|\cdot\|)$. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), on pose $g_p(x) := c_p x^p$.

La suite du terme général $S_n(x) = \sum_{k=0}^n g_k(x)$, notée $\sum_{n \geq 0} g_n(x)$, est appelée la **série de Taylor** de terme général $g_n(x)$.

Les séries de Taylor sont un cas particulier des séries de fonctions. Par suite, on portera un intérêt particulier à la recherche du domaine de convergences, aux propriétés topologiques de ces séries (e.g., convergence normale, uniforme, ...).

Deux résultats centraux régissent, en fait, l'aspect global de ces séries : le lemme d'Abel et le théorème de Hadamard.

Lemme 5.1 (Abel). Dès qu'il existe $x_0 \neq 0$ et $M > 0$ tels que

$$\|c_p x_0^p\| \leq M, \quad \forall p \geq 0,$$

alors $\sum_{p \geq 0} g_p(x)$ est normalement convergente dans tout disque $D(0, r)$ ($= \{x : |x| \leq r\}$) avec $r < |x_0|$.

Démonstration.

Noter tout d'abord que si $\sum_{p \geq 0} c_p x^p$ existe, alors $\sum_{p \geq 0} c_p x^p = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$, où $S_n(x) = \sum_{p=0}^n c_p x^p$.

Par suite, $(S_n(x))_n$ est de Cauchy. Donc, en particulier, $\|S_{m+1}(x) - S_m(x)\| = \|c_{m+1} x^{m+1}\|$ tend vers 0 à l'infini.

Maintenant, pour établir le lemme, soit $x_0 \neq 0$. Alors :

$$c_p x^p = c_p \cdot x^p \cdot \frac{x_0^p}{x_0^p} = (c_p x_0^p) \cdot \left(\frac{x}{x_0}\right)^p.$$

Donc,

$$\|c_p x^p\| = \|c_p x_0^p\| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^p.$$

Par suite, si on suppose que $|x| \leq r < |x_0|$, il s'ensuit alors que

$$\|c_p x^p\| \leq M \cdot \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^p \quad \text{avec} \quad \frac{r}{|x_0|} < 1.$$

Donc,

$$\sum_{p \geq 0} \|c_p x^p\| \leq M \cdot \frac{1}{1 - \frac{r}{|x_0|}} = M \cdot \frac{|x_0|}{|x_0| - r} < +\infty.$$

En d'autres termes,

$$\|g_p\| = \sup_{|x| \leq r} \|g_p(x)\| \leq M \cdot \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^p.$$

Donc, $\sum_{p \geq 0} g_p(x)$ est normalement convergente dans le disque $D(0, r]$ et donc uniformément et absolument convergente dans le même disque.

Noter qu'à ce stade, $\sum_{p \geq 0} g_p(x)$ est absolument convergente dans $D(0, |x_0|)$. □

5.1 Théorème de Hadamard

Théorème 5.1 (Hadamard). Si $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \|c_n\|^{1/n}$, alors :

- 1) $\sum_{p \geq 0} g_p(x)$ ne converge pas (sauf pour $x = 0$) si $\alpha = +\infty$,
- 2) $\sum_{p \geq 0} g_p(x)$ converge absolument en tout x tel que $|x| < \frac{1}{\alpha}$ et ne converge pas pour $|x| > \frac{1}{\alpha}$, chaque fois que $0 < \alpha < +\infty$,
- 3) $\sum_{p \geq 0} g_p(x)$ converge en tout x si $\alpha = 0$.

$R := \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \|c_n\|^{1/n}}$ est appelé le **rayon de convergence** de $\sum_{p \geq 0} g_p(x)$.

Corollaire 5.1. Soit $S(z) = \sum_{p \geq 0} c_p z^p$. Supposons que le rayon de cette série soit R . Alors $z \mapsto S(z)$ est égale à sa série de Taylor au point 0 :

$$S(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \quad \text{pour } |z| < r.$$

Corollaire 5.2. Si on pose $S_n(z) = \sum_{p=0}^n a_p z^p$ avec $R_S = R$, alors :

- 1) S_n converge uniformément vers S sur tout disque $D(0, r]$ avec $r < R$.
- 2) S'_n converge uniformément vers $T(z) = \sum_{p \geq 1} p a_p z^{p-1}$ sur tout disque $D(0, r]$ avec $r < R$, et par suite $z \mapsto S(z)$ est différentiable et vérifie les conditions de Cauchy-Riemann. Donc, $z \mapsto S(z)$ est dérivable au sens complexe et

$$S'(z) = \sum_{p \geq 1} p a_p z^{p-1}.$$

6 Fonction exponentielle complexe

Proposition 6.1 (Propriétés de l'exponentielle complexe). Soit $z \mapsto \exp(z) := \sum_{k \geq 0} \frac{z^k}{k!}$.

- 1) $e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'}, \forall z, z' \in \mathbb{C}$,
- 2) $\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$,
- 3) $(e^z)' = e^z, \forall z \in \mathbb{C}$,
- 4) $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{+\infty} e^x = +\infty, \lim_{-\infty} e^x = 0$,
- 5) Il existe $\pi > 0$ tel que $e^{i\pi/2} = i$ et $e^{i\pi} = -1$,
- 6) $e^{z+2\pi i} = e^z, \forall z \in \mathbb{C}$,
- 7) $t \mapsto e^{it}$ est surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}(0, 1) = \{z : |z| = 1\}$,

8) Pour tout $w \in \mathbb{C}^*$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $w = e^z$.

Démonstration.

1) $b : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $b(u, v) = uv$ est bilinéaire continue.

Par suite,

$$e^z \cdot e^{z'} = \sum_{p \geq 0} \left(\sum_{l+k=p} \frac{z^l}{l!} \frac{z'^k}{k!} \right) = \sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} \sum_{l=0}^p \binom{p}{l} z^l z'^{p-l} = \sum_{p \geq 0} \frac{(z+z')^p}{p!} = e^{z+z'}.$$

En particulier, $e^0 = e^z \cdot e^{-z} = 1$.

2) $\forall z \in \mathbb{C}$, $e^z \cdot e^{-z} = 1 \neq 0$, et par suite $e^z \neq 0$.

3) On a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{h} = e^z \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$.

Comme $R_{\exp} = +\infty$ et $z \mapsto e^z$ est continue uniformément sur tout $D(0, R)$, il s'ensuit alors que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \sum_{n \geq 1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^{n-1}}{n!} = 1.$$

D'où $(e^z)' = e^z$.

4) Facile.

5) On a

$$e^{it} = \sum_{n \geq 0} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

On pose

$$\cos t := \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin t := \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Maintenant,

$$(e^{it})' = ie^{it} = (\cos t)' + i(\sin t)' = -\sin t + i \cos t.$$

Donc,

$$(\cos t)' = -\sin t, \quad (\sin t)' = \cos t.$$

De plus, $\cos 0 = 1$ et $\cos 2 = -\frac{1}{3} + (\dots) < -\frac{1}{3}$.

Comme $t \mapsto \cos t$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et strictement décroissante sur $[0, 2]$, il s'ensuit qu'il existe $\frac{\pi}{2} > 0$ tel que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Donc, $e^{i\pi/2} = 0 + i \sin \frac{\pi}{2} = i$.

Aussi, $e^{2i\pi} = e^{i\pi} \cdot e^{i\pi} = (-1) \cdot (-1) = 1$.

Maintenant pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e^{2k\pi i} = 1$. Donc $e^{z+2\pi i} = e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

6) et viii. Découlent des propriétés ci-dessus.

□

Théorème 6.1. La fonction

$$\varphi :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{C}(0, 1) := \{z : |z| = 1\}, \quad t \mapsto e^{it}$$

est une bijection continue. C'est un homéomorphisme de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{C}(0, 1) \setminus \{-1\}$.

7 Principe des zéros isolés

Définition 7.1 (Principe des zéros isolés). *Rappelons qu'une partie A d'un espace topologique (X, τ) est **discrète** pour la topologie induite sur A , lorsque pour tout $a \in A$, il existe un ouvert dans X contenant a , U_a , tel que $U_a \cap A = \{a\}$.*

Aussi, pour toute fonction f , pose-t-on $Z(f) := \{x : f(x) = 0\}$.

Lemme 7.1. *Soit $f(z) = \sum_{p \geq 0} a_p z^p$ avec $R_f = R$. Si f n'est pas identiquement nulle (i.e., il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $a_p \neq 0$), alors $f(z) \neq 0$ sur un certain disque $D(0, r) \setminus \{0\}$.*

En d'autres termes, si $f \neq 0$, alors $Z(f)$ est une partie discrète de $\mathbb{C}$.

Démonstration.

Soit p_0 le premier entier tel que $a_{p_0} \neq 0$. Donc,

$$f(z) = z^{p_0} g(z), \quad \text{avec } g(z) = \sum_{k \geq 0} a_{p_0+k} z^k.$$

De plus, $R_f = R = R_g$.

Comme $g(0) = a_{p_0}$ et g est une fonction continue, il s'ensuit qu'il existe $r > 0$ tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in D(0, r)$.

Ce qui achève la preuve. □

Théorème 7.1 (Principe du prolongement analytique). *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et $f : U \rightarrow X$ une fonction analytique dans U . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) $Z(f)$ a un point d'accumulation,
- 2) Il existe $a \in U$ tel que $f^{(p)}(a) = 0, \forall p \in \mathbb{N}$,
- 3) $f \equiv 0$.

Corollaire 7.1. *Les zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle sur U sont d'ordre fini.*

8 Prolongement analytique

Définition 8.1 (Prolongement analytique). *On dira que le couple (V, g) est un **prolongement analytique** de la fonction analytique $f : U \rightarrow X$ lorsque :*

- 1) V est un ouvert contenant U ,
- 2) g est analytique sur V et $g|_U = f$.

Théorème 8.1 (Principe du prolongement analytique). *Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ et f, g deux fonctions analytiques sur U telles que $Z(f - g)$ ait un point d'accumulation. Alors f et g sont identiques sur U .*

9 Fonction logarithme

Proposition 9.1. *La fonction*

$$f : \mathbb{D}_\alpha \rightarrow \mathbb{B}_\alpha, \quad w \mapsto \log_\alpha(w)$$

est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}_\alpha$. De plus, $f'(w) = \frac{1}{w}$.

On dit alors que f est une primitive de $\left(w \mapsto \frac{1}{w}\right)$ sur $\mathbb{D}_\alpha$.

Définition 9.1. Pour $z \in \mathbb{D}_\alpha = \mathbb{C} \setminus \mathbb{L}_\alpha$, on pose par définition

$$\log z = \log |z| + i \arg_\alpha(z).$$

Noter que $\log_0 z = \log |z| + i \arg z$ s'appelle la **détermination principale** du logarithme. Aussi, $\log_\alpha z = \log(ze^{-i\alpha}) + i\alpha$.

10 Intégrales curvilignes

Rappelons qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow X$ est **continue par morceaux** lorsqu'elle est continue sauf peut-être en un nombre fini de points où sa limite à gauche et à droite existent.

Définition 10.1 (Chemin). Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Un **chemin** γ dans U est une fonction de $[a, b] \rightarrow U$ continue et continûment différentiable par morceaux telle que $\gamma(a) = \alpha$, $\gamma(b) = \beta$ qui sont l'origine et l'extrémité de γ .

$\Gamma := \gamma([a, b])$ s'appelle l'image de γ .

En particulier, si $f : \Gamma \rightarrow X$ est continue, $t \mapsto f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ est continue par morceaux. Par suite, en posant $z = \gamma(t)$, $dz = \gamma'(t) dt$, on a :

$$\int_\gamma f(z) dz \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Proposition 10.1. Soit γ un chemin de $[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, g une fonction continue sur $\Gamma = \gamma([a, b])$. Alors l'application

$$z \mapsto f(z) = \int_\gamma \frac{g(u)}{u-z} du$$

est une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Plus précisément, pour tout $a \notin \Gamma$ et pour tout $z \in D(a, r)$ tel que $D(a, r) \cap \Gamma = \emptyset$, on a

$$f(z) = \sum_{p \geq 0} c_p (z - a)^p = \sum_{p \geq 0} \frac{f^{(p)}(a)}{p!} (z - a)^p,$$

avec

$$c_p = \int_\gamma \frac{g(u)}{(u - a)^{p+1}} du.$$

11 Indice d'un chemin

Définition 11.1 (Indice). Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin et $\xi \notin \Gamma = \gamma([a, b])$.

Alors, $f(t) = \xi - \gamma(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$. Par suite, f admet un logarithme continu.

On pose :

$$N(\gamma, \xi) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - \xi}.$$

$N(\gamma, \xi)$ s'appelle l'**indice** de ξ par rapport à γ .

Proposition 11.1. 1) Si γ est un chemin fermé, alors

$$N(\gamma, \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - \xi} \in \mathbb{Z}.$$

2) $\xi \mapsto N(\gamma, \xi)$ est localement constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et égale à zéro sur la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

12 Primitives au sens complexe

Définition 12.1. On dit que $f : U \rightarrow X$ admet une **primitive** sur U s'il existe $F : U \rightarrow X$ telle que :

- 1) F est holomorphe sur U ,
- 2) $F'(z) = f(z)$, $z \in U$.

Exemple. La fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, car sinon $\log_0 z$ étant une primitive de $\frac{1}{z}$ sur $\mathbb{D}_0$ et par suite $F(z) = \log_0 z + C$ sur $\mathbb{D}_0$. D'où F sera un prolongement analytique de $\log_0 z$ sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$: ce qui est faux.

Proposition 12.1. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) f admet une primitive sur U ,
- 2) $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ pour tout chemin fermé dans U ,
- 3) $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ pour tout chemin brisé fermé dans U .

Théorème 12.1 (Cauchy-Goursat). Toute fonction holomorphe sur un ouvert étoilé U admet une primitive. En particulier,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

pour tout chemin fermé γ dans U . <https://keepmath.com>

13 Lemmes de Jordan

Lemme 13.1 (Jordan 1). Soient $R > 0$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ et $\Omega_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R, \theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2\}$.

Si $f : \Omega_R \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et vérifie $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} zf(z) = 0$, et si $\gamma(R)$ désigne l'arc de cercle

$$\{|z| = R, \theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2\} = \{z = Re^{i\theta}, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\},$$

alors

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(R)} f(z) dz = 0.$$

Lemme 13.2 (Jordan 2). Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi$ et $\Omega_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r, \theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2\}$.

Si $f : \Omega_r \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et vérifie $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = L$, et si $\gamma(r)$ désigne l'arc de cercle

$$\{|z - z_0| = r, \theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2\} = \{z = z_0 + re^{i\theta}, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\},$$

alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma(r)} f(z) dz = iL(\theta_2 - \theta_1).$$

Lemme 13.3 (Jordan 3). Soient $R > 0$, $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$, et $\Omega_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| > R, \theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2\}$.

Si $f : \Omega_R \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et vérifie $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z) = 0$, et si $\gamma(R)$ désigne l'arc de cercle

$$\{|z| = R, \theta_1 \leq \arg(z) \leq \theta_2\} = \{z = Re^{i\theta}, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\},$$

alors pour tout réel $\lambda > 0$,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(R)} f(z) e^{i\lambda z} dz = 0.$$

14 Formule de Cauchy

Théorème 14.1 (Formule de Cauchy). Soit f une fonction holomorphe sur K compact limité par un nombre fini de chemins de classe C^1 et soit ∂K le bord orienté de K . Alors pour $z_0 \in \overset{\circ}{K}$, on a

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Théorème 14.2 (Holomorphe $\Rightarrow$ analytique). Toute fonction holomorphe sur $D(0, R)$ peut être représentée par une série dans $D(0, R)$ de façon unique, i.e.,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \quad \text{pour } z \in D(0, R).$$

De plus, pour $0 < r < R$, on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

15 Série de Laurent et Résidus

Définition 15.1 (Zéro et pôle). 1) Si f est holomorphe sur un voisinage de $z_0 \in \mathbb{C}$, on dit que z_0 est un **zéro** de f d'ordre p , $p \neq 0$, lorsqu'on a :

$$f(z_0) = \dots = f^{(p-1)}(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(p)}(z_0) \neq 0.$$

2) Sous les hypothèses de i., il existe φ holomorphe sur $V(z_0)$ telle que

$$f(z) = (z - z_0)^p \varphi(z), \quad \forall z \in V(z_0), \quad \varphi(z_0) \neq 0.$$

3) Soit f définie sur $V(z_0) \setminus \{z_0\}$. On dit que z_0 est un **pôle** de f d'ordre p , $p \neq 0$, lorsqu'il existe φ holomorphe dans $V(z_0)$ telle que $\varphi(z_0) \neq 0$ et pour tout $z \neq z_0$,

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^p}.$$

Théorème 15.1 (Série de Laurent). Soit f holomorphe sur $D(0, R_1, R_2) = \{z : R_1 < |z| < R_2\}$. Alors f a une représentation unique en série de Laurent, i.e., il existe une série doublement infinie telle que

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n.$$

De plus, pour tout $r \in]R_1, R_2[$, on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(r)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Définition 15.2 (Résidu). Si z_0 est un pôle d'ordre p de f , alors

$$f(z) = \frac{b_p}{(z - z_0)^p} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k.$$

Le coefficient $b_1 = a_{-1}$ est appelé le **résidu** de f au point z_0 . On pose :

$$a_{-1} = \text{Res}(f, z_0).$$

16 Règles de calcul des résidus

Proposition 16.1 (Règle 1 : Pôle simple). Si z_0 est un pôle simple (i.e., d'ordre 1) de f , alors

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

En particulier, si $f = \frac{P}{Q}$ où P, Q sont holomorphes et si $P(z_0) \neq 0$, et $Q(z_0) = 0$ (une racine simple), alors

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{Q(z) - Q(z_0)} z - z_0 = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Proposition 16.2 (Règle 2 : Pôle multiple). Si z_0 est un pôle multiple d'ordre $p \geq 2$, alors pour trouver le résidu de f au point z_0 , on représente $(z - z_0)^p f(z)$ en série de Laurent dans un voisinage de z_0 . Le coefficient de $(z - z_0)^{p-1}$ est le résidu de f au point z_0 .

En particulier, si $f = \frac{P}{Q}$, z_0 est un zéro d'ordre p de Q , alors $Q(z) = (z - z_0)^p Q_0(z)$ avec $Q_0(z) \neq 0$ pour tout $z \neq z_0$. <https://keepmath.com>

Par suite,

$$(z - z_0)^p f(z) = \frac{P(z)}{Q_0(z)}.$$

On développe $\frac{P(z)}{Q_0(z)}$ dans un voisinage de z_0 en série de Taylor. Le coefficient de $(z - z_0)^{p-1}$ donne le résidu.

17 Théorème des Résidus

Théorème 17.1 (Théorème des Résidus). Soit K un compact limité par un nombre fini de chemins de classe C^1 et $F = \{z_1, \dots, z_n\} \subset \bar{K}$. Si f est holomorphe sur $K \setminus F$ ayant z_i ($i = 1, \dots, n$) pour pôles, alors

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k).$$

Théorème 17.2 (Nombre de zéros d'une fonction holomorphe). Soit K un compact, f holomorphe sur K telle que $f(z) \neq 0$ sur ∂K . Soit $N(f, K)$ le nombre de zéros de f dans K (chaque z_0 est compté avec sa multiplicité). Alors

$$N(f, K) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Corollaire 17.1 (Théorème de d'Alembert). Si $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ non constant, alors $P(X)$ a n racines dans $\mathbb{C}$ (comptées avec leurs multiplicités) où $n = \deg P(X)$.