

Chapitre 3 : Compacité

Définitions

Définition 0.1 On dit qu'un espace topologique (E, τ) est **compact** ssi (E, τ) est séparé et (Borel-Lebesgue) de tout recouvrement d'ouverts, on peut extraire un recouvrement fini.

Remarque. Borel-Lebesgue s'écrit aussi avec des fermés :

$$\forall (F_i)_{i \in I} \subset \tau^c, \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset \implies \exists J \in \mathcal{P}_f(I), \bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset.$$

Proposition 0.1 Soit (E, τ) un compact et $(F_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de fermés non vides. Alors $\bigcap_{n \geq 0} F_n \neq \emptyset$.

Démonstration. Si l'intersection est vide, d'après Borel-Lebesgue, il existe $J \subset I$ finie telle que $\bigcap_{n \in J} F_n = \emptyset$. Avec $n_0 = \max J$, $\bigcap_{n \in J} F_n = F_{n_0} = \emptyset$ d'où la contradiction.

Remarque.

- $\mathbb{R}$ n'est pas compact car $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n-1, n+1[$ et pour tout k , $k \notin \bigcup_{n \neq k}]n-1, n+1[$.
- On a aussi une preuve avec des fermés : $\bigcap_{n \geq 0} [n, +\infty[= \emptyset$ avec des fermés non vides.

<https://keepmath.com>

Définition 0.2 Soit (E, τ) un espace topologique et $K \subset E$. K est dite **partie compacte** de E ssi (K, τ_K) est compact ssi :

- (K, τ_K) est séparé
- $K = \bigcup_{i \in I} (\omega_i \cap K) \implies \exists J \subset I$ finie, $K = \bigcup_{i \in J} (\omega_i \cap K)$.

SSI

- (K, τ_K) est séparé
- $K \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i \implies \exists J \subset I$ finie, $K \subset \bigcup_{i \in J} \omega_i$.

Proposition 0.2 Si (E, τ) est séparé, K compact $\implies K$ fermé. Si (E, τ) est compact, K fermé $\implies K$ compact.

Démonstration.

- Soit $x \in K^c$. Pour tout $y \in K$, il existe ω_{1y}, ω_{2y} tels que $y \in \omega_{1y}$, $x \in \omega_{2y}$ et $\omega_{1y} \cap \omega_{2y} = \emptyset$. $K \subset \bigcup_{x \in K} \omega_{1y}$ donc il existe $(y_1, \dots, y_p)$ tel que $K \subset \bigcup_{1 \leq i \leq p} \omega_{1y_i}$.
 $K \cap \left(\bigcap_{1 \leq i \leq p} \omega_{2y_i} \right) \cap K \neq \emptyset$ donc $x_0 \in K^c$ donc K^c ouvert et K fermé.
- Si $\bigcap_{i \in I} (F_i \cap K) = \emptyset$, il existe J finie telle que $\bigcap_{i \in J} (F_i \cap K) \neq \emptyset$. De plus, si (E, τ) est séparé, (K, τ_K) le reste.

Exemple. $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ n'est pas un compact de $\mathbb{Q}$ car il n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Propriétés

Proposition 0.3 Soit (E, τ) un compact, (x_n) une suite d'éléments de E . Alors (x_n) a une valeur d'adhérence et si celle-ci est unique (x_n) converge.

Démonstration.

- $\text{adh}(x) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{X_n}$ donc $\text{adh}(x)$ est une intersection de fermés non vides. Donc $\text{adh}(x) \neq \emptyset$.
- Supposons $\text{adh}(x) = \{a\}$. Soit ω un ouvert contenant a .

$$\bigcap_{n \geq 0} (\overline{X_n} \cap \omega^c) = \left(\bigcap_{n \geq 0} \overline{X_n} \right) \cap \omega^c = \emptyset.$$

Donc il existe J finie telle que $\bigcap_{n \in J} (\overline{X_n} \cap \omega^c) = \emptyset$ donc il existe $n \in J$, $\overline{X_n} \cap \omega^c = \emptyset$.
Donc $\overline{X_n} \subset \omega$ donc $X_n \subset \omega$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$.

Proposition 0.4 L'image continue d'un compact est un compact si l'espace d'arrivée est séparé.

Démonstration. Si $f(K) \subset \bigcup_{i \in I} \omega'_i$, $K \subset f^{-1}(\bigcup_{i \in I} \omega'_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(\omega'_i)$. Il existe alors J finie telle que $K \subset \bigcup_{i \in J} f^{-1}(\omega'_i)$. Donc $f(K) \subset \bigcup_{i \in J} \omega'_i$.

Lemme 0.1 Dans un espace métrique, tout compact est borné.

Démonstration. Soit $x_0 \in K$. $K \subset \bigcup_{r > 0} B_d(x_0, r)$ donc il existe $R > 0$ tel que $K \subset B_d(x_0, R)$.

Corollaire 0.1 Si $f : (E, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $K \subset E$ est compact, $f|_K$ est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. $f(K)$ est borné car compact. Donc il est fermé et contient ses bornes.

Définition 0.3 K est dit **précompact** ssi

$$\forall \rho > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \exists (x_1, \dots, x_n), K \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(x_i, \rho).$$

Proposition 0.5 Soit (E, d) un espace métrique. K compact ssi $\forall x \in K^\mathbb{N}$, $\text{adh}(x) \neq \emptyset$ et $\text{adh}(x) \subset K$ ssi $\forall x \in K^\mathbb{N}$, $\exists \varphi \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ strictement croissante, $x \circ \varphi$ converge dans K .

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$ vu dans les espaces topologiques. $2 \Rightarrow 3$ définition de $\text{adh}(x)$ dans un espace métrique. $3 \Rightarrow 1$ nécessite deux lemmes.

Lemme 0.2 Si K vérifie 3 avec $K \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$, il existe $\rho_0 > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe i_x tel que $B(x, \rho_0) \subset \omega_{i_x}$.

Démonstration. Supposons que $\forall \rho_0 > 0, \exists x \forall i, B(x, \rho_0) \not\subset \omega_i$. Pour $\rho_0 = \frac{1}{n}$, on définit une suite $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$. Il existe donc φ, l tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = l \in K = \bigcup_{i \in I} \omega_i$. Il existe i_0 tel que $l \in \omega_{i_0}$ donc, comme ω_{i_0} est ouvert, il existe $\varepsilon > 0, B(l, \varepsilon) \subset \omega_{i_0}$. Pour k assez grand $B(x_{\varphi(k)}, \frac{1}{\varphi(k)}) \subset B(l, \varepsilon) \subset \omega_{i_0}$. En effet, pour tout $z \in B(x_{\varphi(k)}, \frac{1}{\varphi(k)})$,

$$d(z, l) \leq d(z, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, l) \rightarrow 0.$$

Donc on a une contradiction.

Lemme 0.3 *Si K est séquentiellement compact, il est précompact.*

Démonstration. On suppose que

$$\exists \rho > 0, \forall p \geq 0, \forall x_1, \dots, x_p, K \not\subset \bigcup_{1 \leq i \leq p} B(x_i, \rho).$$

On construit $x \in K^{\mathbb{N}}$ tel que :

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ \forall i \in \mathbb{N}, x_i \in K \setminus \left(\bigcup_{1 \leq j \leq i-1} B(x_j, \rho) \right) \neq \emptyset \text{ par hypothèse} \end{cases}$$

Il existe l, φ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = l$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_{\varphi(n)}, l) = 0$. Or cette suite est minorée par ρ à partir d'un certain rang. Donc contradiction.

Soit $K \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$ avec ω_i ouverts. D'après le lemme 3.0.3, $\exists \rho_0 > 0, \forall x \in K, \exists i_x, B(x, \rho_0) \subset \omega_{i_x}$. D'après le lemme 3.0.4, $\exists p, x_1, \dots, x_p, K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \rho_0) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} \omega_{i_{x_j}} \cdot \bigcup_{1 \leq j \leq p} \omega_{i_{x_j}}$ est un recouvrement fini de K donc K vérifie Borel-Lebesgue.

Théorème 0.1 (Tychonoff) *Tout produit de compacts est compact.*

Démonstration.

— Cas fini. Soient K_1, K_2 deux compacts. On a déjà vu que $K_1 \times K_2$ était séparé. Si $K_1 \times K_2 \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$, on a

$$\bigcup_{i \in I} \omega_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{j \in J_i} (\omega_1^j \times \omega_2^j) = \bigcup_{k \in K} \omega_1^k \times \omega_2^k.$$

Pour x_1 fixé dans K_1 , $\{x_1\} \times K_2$ est compact car homéomorphe à K_2 donc il existe $K_{x_1} \subset K$ fini tel que $\{x_1\} \times K_2 \subset \bigcup_{k \in K_{x_1}} \omega_1^k \times \omega_2^k$.

$$x_1 \in \bigcap_{k \in K_{x_1}} \omega_1^k \text{ donc } K_1 \subset \bigcup_{x_1 \in K_1} \bigcap_{k \in K_{x_1}} \omega_1^k.$$

Or, comme K_1 compact, $K_1 \subset \bigcup_{1 \leq j \leq q} \bigcap_{k \in K_{x_j}} \omega_1^k$.

$$\text{Donc } K_1 \times K_2 \subset \bigcup_{1 \leq j \leq q} \omega_1^k \times \bigcup_{1 \leq j \leq q} \omega_2^k \subset \bigcup_{l \in \{\text{fini}\}} (\omega_1^l \times \omega_2^l).$$

Donc $K_1 \times K_2$ est compact.

- Cas d'un produit dénombrable d'espaces métriques compacts. On va montrer que $K = \prod_{i=1}^{\infty} K_i$ est séquentiellement compact. Soit $(X^p)_p$ une suite d'éléments de K . On note $X^p = (x_p^n)_n$. $(x_p^1)_p$ est une suite de K_1 donc il existe x^1, φ_1 tel que $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_{\varphi_1(p)}^1 = x^1$. $(x_{\varphi_1(p)}^2)_p$ est une suite de K_2 donc il existe x^2, φ_2 tel que $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_{\varphi_1(\varphi_2(p))}^2 = x^2$. On construit ainsi par récurrence une suite $(x^n)_n$ et $(\varphi_n)_n$ tels que $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_n^{(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_p)(p)} = x^n$. Soit n fixé. Pour tout $p \geq n$, on a :

$$x_n^{(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_p)(p)} = x_n^{(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_{n-1})(\varphi_{n+1} \circ \dots \circ \varphi_p)(p)}.$$

Or $\lim_{p \rightarrow +\infty} (\varphi_{n+1} \circ \dots \circ \varphi_p)(p) = +\infty$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_n^{(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_p)(p)} = x^n$. Donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} X^{(\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_p)(p)} = (x^n)_n$. Donc K est séquentiellement compact.

- Les autres cas sont admis.

Proposition 0.6 Si K est compact et $f : (K, d) \rightarrow (E', d')$ continue, alors f est uniformément continue.

Démonstration. Supposons que f ne soit pas continue. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ il existe $x_\eta, y_\eta \in K$ tel que $d(x_\eta, y_\eta) \leq \eta$ et $d(f(x_\eta), f(y_\eta)) > \varepsilon$. Avec $\eta = \frac{1}{n}$, on obtient des suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ dans K . Il existe l, φ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = l$. On a aussi $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)} = l$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) = 0$.

$$\varepsilon < d(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) \leq d(f(x_{\varphi(n)}), f(l)) + d(f(l), f(y_{\varphi(n)})) \rightarrow 0.$$

<https://keepmath.com>

D'où une contradiction.

Compacité et espaces vectoriels normés

Lemme 0.4 Soit $\mathbb{R}^N$ muni de la norme infinie et $K \subset \mathbb{R}^N$. K compact ssi K fermé borné.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Déjà fait.

$\Leftarrow$ K est borné donc $K \subset \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$.

Lemme 0.5 $[a, b]$ est un compact de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Montrons la propriété de Borel-Lebesgue pour $[a, b]$. Si $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$, posons

$$A = \{x \in [a, b], \exists J_x \in \mathcal{P}_f(I), [a, x] \subset \bigcup_{i \in J_x} \omega_i\}.$$

$A \neq \emptyset$ car $a \in A$. Soit $x \in A$. $[a, x] \subset \bigcup_{i \in J_x} \omega_i$ donc il existe i_0 tel que $x \in \omega_{i_0}$ qui est ouvert donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \omega_{i_0}$. Donc $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$ et A ouvert.

Soit $(x_n)_n \in A^\mathbb{N}$ qui converge vers $x \in [a, b]$. $[a, x_n] \subset \bigcup_{i \in J_{x_n}} \omega_i$ et il existe i_0 tel que $x \in \omega_{i_0}$ donc il existe $N > 0$ tel que $x_n \in \omega_{i_0}$.

$$[a, x_N] \subset \bigcup_{i \in J_{x_N}} \omega_i \text{ donc } [a, x] \subset \left(\bigcup_{i \in J_{x_N}} \omega_i \right) \cup \omega_{i_0}.$$

Donc $x \in A$. A est ouvert fermé de $[a, b]$ qui est connexe donc $A = [a, b]$ donc $b \in A$ donc $[a, b]$ compact.

Donc K est fermé dans un compact, donc compact.

Corollaire 0.2 Si $(x_n) \in (\mathbb{R}^N)^\mathbb{N}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente.

Démonstration. Il existe $R > 0$ tel que pour tout n , $x_n \in \overline{B}(O, R)$ qui est fermée bornée donc compacte donc séquentiellement compacte, ce qui assure le résultat.

Théorème 0.2 Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie N et notons $(e_1, \dots, e_N)$ une base de E .

— L'application

$$T : \begin{cases} (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_E) \\ (x_1, \dots, x_N) \mapsto \sum_{i=1}^N x_i e_i \end{cases}$$

est un homéomorphisme.

- K est compact ssi K est fermé borné.
- Les normes sont équivalentes.
- Toute application linéaire est continue.

Démonstration.

— T est clairement une bijection.

$$\|T(x)\|_E \leq \sum_{i=1}^N |x_i| \|e_i\|_E \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^N \|e_i\|_E.$$

Donc T est lipschitzienne donc continue. Il reste à montrer que T^{-1} est continue. $S = \overline{S}_\infty(O, 1)$ est compact et

$$\overline{T} : \begin{cases} S \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \|T(x)\|_E \end{cases}$$

est continue sur icelui donc $\overline{T}$ est minorée par $\overline{T}(x_0)$. On a $0 < \overline{T}(x_0) \leq \overline{T}(x)$ pour tout $x \in S$. Donc pour tout $x \neq 0$, $\overline{T}\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \geq \overline{T}(x_0)$ donc T^{-1} est aussi lipschitzienne.

- K compact ssi $T^{-1}(K)$ compact ssi $T^{-1}(K)$ fermé borné ssi K fermé borné.
- T^{-1} est un homéomorphisme donc toutes les normes sont équivalentes à la norme infinie.

- Les projections sont continues car on est en dimension finie, $+$ et $\cdot$ sont continues donc

$$f : \begin{cases} E \rightarrow E \\ \sum_{i=1}^N x_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^N x_i f(e_i) \end{cases}$$

le reste.

Corollaire 0.3 Soit F un sous-espace vectoriel de E avec $\dim(F)$ finie. F est fermé.

Démonstration. $\overline{B}_F(O, 1)$ est compacte donc fermé et F reste fermé par dilation.

Corollaire 0.4 Pour tout $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\|f - P\| = \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|.$$

Démonstration.

$$T : \begin{cases} (\mathbb{R}_n[X], \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, \|\cdot\|) \\ Q \mapsto \|Q - f\| \end{cases}$$

est continue et $\lim_{\|Q\| \rightarrow +\infty} T(Q) = +\infty$ car $\|f - Q\| \geq \|Q\| - \|f\|$. Il existe donc $R > 0$ tel que $\|Q\| \geq R \implies T(Q) \geq \inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} T(Q) + 1$. On a de plus $\inf_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} T(Q) = \inf_{Q \in \overline{B}(O, R)} T(Q)$ qui est donc atteint car $\overline{B}(O, R)$ est compacte.

Théorème 0.3 (Riesz) Soit E un espace vectoriel normé. $\overline{B}_E(O, 1)$ est compacte ssi $\dim(E)$ est finie.

Démonstration.

$\Rightarrow B = \overline{B}_E(O, 1)$ est compact donc précompact donc $B \subset \bigcup_{i=1}^p \overline{B}(x_i, \frac{1}{2})$. Posons $F = \text{Vect}\{x_1, \dots, x_p\}$.

$$B \subset F + \frac{1}{2}B \subset \frac{3}{2}F + \frac{1}{4}B \subset \dots \subset F + \frac{1}{2^n}B.$$

Donc $B \subset \overline{F} = F$ donc $E \subset F$. Donc $\dim(E) = p$.

$\Leftarrow B$ est fermé borné donc compact.

Théorème 0.4 Soit E un espace vectoriel normé et $T : E \rightarrow E$ linéaire compacte (ie pour tout borné B , $T(B) \subset K$ avec K compact). Si $\lambda \neq 0$, $\dim(E_\lambda)$ est finie où $E_\lambda = \{x \in E, T(x) = \lambda x\}$.

Démonstration. $\overline{B}_{E_\lambda}(O, 1) = \overline{B}_E(O, 1) \cap E_\lambda \subset \frac{1}{\lambda}T(\overline{B}_E(O, 1))$ qui est donc inclus dans un compact. Donc $\overline{B}_{E_\lambda}(O, 1)$ est fermé dans un compact donc compact et $\dim(E_\lambda)$ est finie.

Espace quotient

Topologie quotient

Définition 0.4 Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace de E . On définit E/F comme le quotient de E par la relation d'équivalence :

$$\forall x, y \in E, x \sim y \text{ ssi } x - y \in F.$$

Proposition 0.7 Si F est fermé, la topologie quotient sur E/F est une topologie d'espace vectoriel normé via la norme :

$$\|\bar{e}\|_{E/F} = \inf_{f \in F} \|e - f\|_E = d(e, F)$$

qui est indépendante du représentant.

Proposition 0.8 $\tau_{\|\cdot\|}$ est la topologie quotient τ .

Démonstration. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\chi_1} & (E/F, \|\cdot\|) \\ & \downarrow \chi_2 & \\ & (E/F, \tau) & \end{array}$$

On veut montrer que χ est continue et ouverte. Elle est continue car linéaire et lipschitzienne en 0 ($\|\chi_1(e)\| = \|\bar{e}\| \leq \|e\|$). Soit O un ouvert de $(E/F, \tau_F)$. On a $O = \chi_2(\chi_2^{-1}(O))$ car χ_2 est surjective. Donc $\chi_1(O) = \chi_1(\chi_2(\chi_2^{-1}(O))) = \chi_1(\chi_2^{-1}(O))$ qui est bien un ouvert car χ_1 est ouverte ($\chi_1(B(e, r)) = B(\chi_1(e), r)$).

Proposition 0.9 Soit E un espace vectoriel normé, $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. φ est continue ssi $\text{Ker}(\varphi)$ est fermé.

Démonstration. Si φ est continue, $\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est donc fermé. Si $\text{Ker}(\varphi)$ est fermé, soit $\varphi = 0$ et c'est fini, soit φ est surjective. On a alors un isomorphisme $\bar{\varphi}$ entre $E/\text{Ker}(\varphi)$ et $\mathbb{R} = \mathfrak{I}(\varphi)$. On a donc $\dim(E/\text{Ker}(\varphi)) = 1$ donc $\bar{\varphi}$ est linéaire dans un espace de dimension finie donc continue donc φ l'est aussi car χ l'est.

Supplémentaires topologiques

Définition 0.5 Soit E un espace vectoriel normé, F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On dit que F et G sont des **supplémentaires topologiques** ssi les projections p_F et p_G sont continues.

Remarque. Comme $p_F + p_G = \text{Id}$, p_F continue ssi p_G continue.

Proposition 0.10 Avec les mêmes notations, si $\dim(F)$ est finie et G fermé, F et G sont des supplémentaires topologiques.

Démonstration. On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\chi} & E/G \\ p_F \searrow & & \nearrow \overline{p}_F \\ & F & \end{array}$$

$\overline{p}_F$ est injective car $G = \text{Ker}(p_F)$ et surjective car p_F l'est. Donc $\dim(E/G) = \dim(F)$ qui est finie donc $\overline{p}_F$ est continue et $p_F = \overline{p}_F \circ \chi$ le reste.

Corollaire 0.5 *Tout sous-espace vectoriel fermé de codimension finie admet un supplémentaire topologique.*

<https://keepmath.com>

<https://keepmath.com>