

Chapitre 2 : Connexité

Définitions

Définition 0.1 On dit qu'un espace topologique (E, τ) est **non connexe** ssi

$$E = \omega_1 \cup \omega_2$$

avec $\omega_1, \omega_2 \in \tau^2$ disjoints. Ceci est équivalent à :

$$E = F_1 \cup F_2$$

avec F_1 et F_2 fermés disjoints (prendre $F_1 = \omega_2^c$ et $F_2 = \omega_1^c$), et à E contient une partie ouverte fermée non triviale (prendre ω_1).

Définition 0.2 Soit (E, τ) un espace topologique. (E, τ) est dit **connexe** ssi

$$(\exists \omega_1, \omega_2 \in \tau \text{ disjoints}, E = \omega_1 \cup \omega_2) \implies \omega_1 = E \text{ ou } \omega_2 = E.$$

Ceci est équivalent à :

$$(\exists F_1, F_2 \in \tau^c \text{ disjoints}, E = F_1 \cup F_2) \implies F_1 = E \text{ ou } F_2 = E$$

et à

$$A \subset E \text{ est ouverte fermée non vide} \implies A = E.$$

Définition 0.3 Soit (E, τ) un espace topologique et $A \subset E$. A est une **partie connexe** de E ssi $(A, \tau|_A)$ est connexe ssi

$$(\exists \omega_1, \omega_2 \in \tau^2 \text{ disjoints}, A \subset \omega_1 \cup \omega_2 \text{ et } \omega_1 \cap \omega_2 \cap A \neq \emptyset) \implies A \subset \omega_1 \text{ ou } A \subset \omega_2.$$

Remarque.

- On a une définition similaire avec les fermés et les ouverts fermés.
- La connexité est une notion topologique donc elle se conserve par homéomorphisme.

Exemple. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ n'est pas connexe :

$$\mathbb{Q} = \left(]-\infty, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q} \right) \cup \left(]\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q} \right).$$

$$\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset \text{ et } \omega_1 \neq E \neq \omega_2.$$

Propriétés

Connexes de $\mathbb{R}$

Théorème 0.1 Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Démonstration.

$\Rightarrow$ On montre que si $A \subset \mathbb{R}$ vérifie $\exists a < b \in A^2$ et $c \in]a, b[\setminus A$, alors A est non connexe. En effet,

$$A = (] - \infty, c[\cap A) \cup (]c, +\infty[\cap A)$$

qui sont non vides et disjoints. En prenant la contraposée, si A est connexe, pour tout $(a, b) \in A$, $[a, b] \subset A$. Donc A est convexe donc c'est un intervalle.

$\Leftarrow$ Montrons que $I =]a, b[$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ est connexe. Soit E un ouvert fermé de I et $c \in E$. Posons

$$A = \{x \in I, [c, x] \subset E\}.$$

$A \neq \emptyset$ ($c \in A$). A est majoré par b donc A admet une borne supérieure γ . Supposons $\gamma < b$. Il existe $(\gamma_n) \in A^{\mathbb{N}}$ croissant vers $\gamma \in I$. E est fermé dans I donc $\gamma \in E$. Comme E est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma + \varepsilon \in E$. $\gamma + \varepsilon \in A$ donc il y a contradiction. Donc $\gamma = b$. On a donc $[c, b[\subset E$. De même, $]a, c] \subset E$ donc $I = E$.

Connexes et fonctions continues

Proposition 0.1 *L'image continue d'un connexe est connexe.*

Démonstration. Soit $f : (E, \tau) \rightarrow (E', \tau')$ continue, et $A \subset E$ connexe. Si $f(A) \subset \omega_1 \cup \omega_2$ avec $\omega_1 \cap \omega_2 \cap f(A) = \emptyset$, on a

$$A \subset f^{-1}(\omega_1) \cup f^{-1}(\omega_2)$$

et $f^{-1}(\omega_1) \cap f^{-1}(\omega_2) \cap A = \emptyset$ donc (A connexe) $A \subset f^{-1}(\omega_1)$ ou $A \subset f^{-1}(\omega_2)$. Donc $f(A) \subset \omega_1$ ou $f(A) \subset \omega_2$.

Corollaire 0.1 (TVI) *Si $f : (E, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $A \subset E$ est connexe, $f(A)$ est un intervalle.*

Corollaire 0.2 *(E, τ) est connexe ssi toute $f : (E, \tau) \rightarrow \{0, 1\}$ continue est constante.*

Démonstration.

$\Rightarrow$ Si $f : (E, \tau) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, $f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$ est une partition de E . Or E est connexe donc $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$ ou $f^{-1}(\{1\}) = \emptyset$.

$\Leftarrow$ Si $E = \omega_1 \cup \omega_2$ avec $\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset$. On pose

$$f : \begin{cases} E \rightarrow \{0, 1\} \\ x \mapsto 0 \text{ si } x \in \omega_1 \\ x \mapsto 1 \text{ si } x \in \omega_2 \end{cases}$$

f est continue car $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont ouverts. Donc f est constante et $\omega_1 = E$ ou $\omega_2 = E$. Donc E est connexe.

Corollaire 0.3 — $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

— $]0, 1[$, $[0, 1]$ et $[0, 1[$ ne sont pas homéomorphes.

Démonstration. Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ était un homéomorphisme,

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$$

en serait un. Or $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ n'est pas connexe alors que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ l'est. Donc $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas homéomorphes.

Théorème 0.2 Soit $A \subset E$ et B un connexe tel que $B \cap A \neq \emptyset$ et $B \cap A^c \neq \emptyset$. On a $B \cap \partial A \neq \emptyset$.

Démonstration. $B \cap \overset{\circ}{A}$, $B \cap \overset{\circ}{A}^c$ et $B \cap \partial A$ forment une partition de B . Si $B \cap \partial A = \emptyset$, on a une partition de B en deux ouverts non vides disjoints. En effet, $B \cap A \neq \emptyset$ et $B \cap \partial A = \emptyset$ donc $B \cap \overset{\circ}{A} \neq \emptyset$. De même $B \cap A^c \neq \emptyset$. On a donc une contradiction car B est connexe.

Proposition 0.2 Soit (E, τ) un espace topologique et $A \subset E$ connexe. Si $B \subset E$ vérifie $A \subset B \subset \overline{A}$, B est connexe.

Remarque. $\overline{A}$ est donc connexe.

Démonstration. Si $B \subset F_1 \cup F_2$ avec $F_1 \cap F_2 \cap B \neq \emptyset$, alors $A \subset F_1 \cup F_2$ et $F_1 \cap F_2 \cap A = \emptyset$. Donc $A \subset F_1$ ou $A \subset F_2$. Donc $\overline{A} \subset F_1$ ou $\overline{A} \subset F_2$ donc $B \subset F_1$ ou $B \subset F_2$ donc B est connexe.

<https://keepmath.com>

Remarque.

- A est connexe $\implies \overline{A}$ connexe (prendre un cône fermé de $\mathbb{R}^2$).
- A et B sont connexes $\nRightarrow A \cap B$ est connexe.

Proposition 0.3 Soit (E, τ) un espace topologique et $(A_i)_{i \in I}$ des connexes tels que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

Démonstration. Si $\bigcup_{i \in I} A_i \subset \omega_1 \cup \omega_2$ et $\omega_1 \cap \omega_2 \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) \neq \emptyset$, alors, pour tout $i \in I$, $A_i \subset \omega_1 \cup \omega_2$ et $\omega_1 \cap \omega_2 \cap A_i \neq \emptyset$. Donc, pour tout $i \in I$, $A_i \subset \omega_1$ ou $A_i \subset \omega_2$. Or il existe $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$. On peut donc supposer $x \in \omega_1$. On a alors $A_i \subset \omega_1$ pour tout $i \in I$ donc $\bigcup_{i \in I} A_i \subset \omega_1$.

Remarque. La propriété est aussi vraie si les A_i ne sont pas disjoints deux à deux.

Corollaire 0.4 Dans un espace vectoriel normé, tout convexe est connexe.

Démonstration. Soit C un convexe et $a \in C$. Pour tout $x \in C$, $[a, x] \subset C$ donc

$$C = \bigcup_{x \in C} [a, x].$$

Pour tout $x \in C$, $[a, x]$ est connexe car homéomorphe à $[0, 1]$ via $h : t \mapsto (1-t)a + tx$. De plus, $a \in \bigcap_{x \in C} [a, x]$ donc C est connexe.

Remarque. Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel topologique, ce qui signifie que c'est un espace vectoriel tel que $+$ et $\cdot$ sont continues.

Définition 0.4 Soit (E, τ) un espace topologique. $A \subset E$ est dite **connexe par arcs** ssi

$$\forall x, y \in A, \exists \gamma : [0, 1] \rightarrow A \text{ continue avec } \gamma(0) = x \text{ et } \gamma(1) = y.$$

Corollaire 0.5 Toute partie connexe par arcs est connexe.

Démonstration. Soit A un connexe par arcs et $a \in A$. Pour tout $x \in A$, il existe $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow A$ continue tel que $\gamma_x(0) = a$ et $\gamma_x(1) = x$. $\gamma_x([0, 1])$ est connexe et on a

$$A = \bigcup_{x \in A} \gamma_x([0, 1]).$$

Or $a \in \bigcap_{x \in A} \gamma_x([0, 1])$ donc A est connexe.

Remarque. La réciproque est fautive :

$$B = \left\{ \left(x, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right), x \in]0, 1] \right\}$$

est connexe car $x \mapsto \left(x, \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)$ est continue. Donc B est connexe mais pas connexe par arcs : $(0, 0)$ n'est pas continûment reliable à $(2, 1)$.

Proposition 0.4 Dans un espace vectoriel normé, tout ouvert connexe est connexe par arcs.

Démonstration. Soit ω un ouvert connexe et $a \in \omega$.

$$A = \{x \in \omega, x \text{ est continûment reliable à } a\}.$$

$a \in A$ donc $A \neq \emptyset$.

Soit $x \in A$. ω est un ouvert donc il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset \omega$. Pour $y \in B(x, r)$, $\gamma_x \cup [x, y]$ joint a à y donc $B(x, r) \subset A$. Donc A est ouvert.

Soit $b \in \overline{A} \cap \omega$. Il existe $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers b . Il existe $r > 0$ tel que $B(b, r) \subset \omega$ et n_0 tel que $x_{n_0} \in B(b, r)$. $\gamma_{x_{n_0}} \cup [x_{n_0}, b]$ relie a à b donc $b \in A$ donc A est fermé.

A est un ouvert fermé non vide de ω connexe donc $A = \omega$.

Notion de composante connexe

Définition 0.5 Soit (E, τ) un espace topologique. On définit la relation $\mathcal{R}$ par $x \mathcal{R} y$ ssi $\exists C$ connexe contenant x et y .

Théorème 0.3 $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Démonstration. La symétrie et la réflexivité sont claires. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, il existe C_1, C_2 deux connexes tels que $x, y \in C_1$ et $y, z \in C_2$. $y \in C_1 \cap C_2$ donc $C_1 \cup C_2$ est connexe et contient x et z .

Définition 0.6 On appelle **composante connexe** les classes de $\mathcal{R}$ (d'où une partition de tout espace topologique en ses composantes connexes).

Proposition 0.5 Toute composante connexe est fermée.

Démonstration. Si $E = \bigcup_{i \in I} C_i$, $\overline{C_i}$ est connexe et contient C_i . Par transitivité, $\overline{C_i} = C_i$.

Remarque. Si I est fini, les C_i sont ouverts. Sinon, on ne peut rien dire (dans $\mathbb{Q}$ les composantes connexes sont les points qui ne sont pas ouverts).

Lemme 0.1 $E_1 \times E_2$ connexe ssi E_1 et E_2 le sont.

Démonstration. Soit $f : E_1 \times E_2 \rightarrow \{0, 1\}$ continue. $f|_{\{x_1\} \times E_2}$ est constante car $\{x_1\} \times E_2$ homéomorphe à E_2 donc connexe. De même, $f|_{E_1 \times \{x_2\}}$ est constante (et c'est la même constante car (x_1, x_2) appartient aux deux ensembles). Donc f est constante.

Proposition 0.6 $(\prod_{i \in I} E_i, \tau_\pi)$ est connexe ssi les (E_i, τ_i) le sont.

Démonstration.

<https://keepmath.com>

$\Leftarrow$ La continuité des projections assurent le résultat.

$\Rightarrow$ Soit $a \in E$. On pose

$$\omega_a = \{(x_i)_{i \in I}, \exists J \in \mathcal{P}_f(I), \forall i \in I \setminus J, x_i = a_i\}.$$

On va montrer que ω_a est connexe et dense. À J fixée,

$$\omega_{J,a} = \{x, \forall i \in I \setminus J, x_i = a_i\}$$

est homéomorphe à $\prod_{i \in J} E_i$ donc est connexe.

$$\omega_a = \bigcup_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \omega_{J,a}$$

et $a \in \bigcap_{J \in \mathcal{P}_f(I)} \omega_{J,a}$ qui sont connexes donc ω_a est connexe.

Pour J finie, on pose $\omega = \prod_J \omega_i \times \prod_{I \setminus J} E_i$. On pose $b \in E$ tel que $b_i = a_i$ sur $I \setminus J$ et $b_i \in \omega_i$ sinon. $b \in \Omega \cap \omega_a$ donc ω_a est dense.

ω_a est donc connexe donc $E = \overline{\omega_a}$ l'est.