

Chapitre 2: Applications Linéaires - Matrices

1 Applications linéaires Isomorphisme d'espaces vectoriels

1.1 Définition et propriétés de base

Définition 1.1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K . Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **linéaire**, (ou parfois **K -linéaire**), si

1. $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. $\forall \alpha \in K, \forall x \in E, f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$.

Si une application linéaire f est bijective, on dit que f est un **isomorphisme d'espaces vectoriels**.

Remarque 1.1. D'après i) et ii), une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire, si et seulement si, pour tout $\alpha \in K$ et pour tout $x, y \in E$, on a $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$.

On désigne par $\mathcal{L}_K(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications K -linéaires de E vers F .

Exemple 1.1. 1. Soient E un K -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . On appelle **injection canonique** de F dans E , l'application $j : F \rightarrow E$ définie par,

$$\forall x \in F, \quad j(x) = x$$

Alors j est une application linéaire.

2. Soient E un K -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . On appelle **surjection canonique** de E vers E/F , l'application définie par,

$$\begin{aligned} s : E &\rightarrow E/F \\ x &\mapsto s(x) = \bar{x} \end{aligned}$$

Alors s est une application linéaire.

3. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Alors l'application f définie par,

$$f : K^n \rightarrow E$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mapsto f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- Proposition 1.2.** 1. Soient E, F et G trois espaces vectoriels sur le même corps K , $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires. Alors $g \circ f$ est une application linéaire.
2. Soit $f : E \rightarrow F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est aussi un isomorphisme d'espaces vectoriels.
3. Deux espaces vectoriels de dimension finie et de même dimension sont isomorphes.

Proof. 1. Soient $x \in E, y \in E$ et $\alpha \in K$, alors on a

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x + y) &= g(f(x + y)) \\ &= g(f(x) + f(y)) \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) \quad (\text{car } g \text{ est linéaire}) \\ &= (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y)\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\alpha x) &= g(f(\alpha x)) \\ &= g(\alpha f(x)) \quad (\text{car } f \text{ est linéaire}) \\ &= \alpha g(f(x)) \quad (\text{car } g \text{ est linéaire}) \\ &= \alpha (g \circ f)(x)\end{aligned}$$

Donc $g \circ f$ est linéaire. □

Proposition 1.3. Soient E et F deux K -espaces vectoriels. Pour f et g deux éléments de $\mathcal{L}_K(E, F)$ et pour α élément de K , on définit $f + g$ et $\alpha \cdot f$, par

$$\forall x \in E, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

Alors $(\mathcal{L}_K(E, F), +, \cdot)$ est un K -espace vectoriel.

Théorème 1.4. Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie. Alors $\mathcal{L}_K(E, F)$ est de dimension finie et on a

$$\dim(\mathcal{L}_K(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

1.2 Noyau et image d'une application linéaire

Proposition 1.5. Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors,

1. L'image par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F . En particulier, $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F , appelé **image** de f et noté $\text{Im}(f)$.
2. L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E . En particulier, $f^{-1}(\{0_F\})$ est un sous-espace vectoriel de E , appelé **noyau** de f et noté $\ker(f)$.

Remarque 1.2. Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors

1.

$$\ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0_F\}$$

$$x \in \ker(f) \iff f(x) = 0_F$$

2.

$$\operatorname{Im}(f) = \{f(x) : x \in E\}$$

$$y \in \operatorname{Im}(f) \iff \exists x \in E : y = f(x)$$

Théorème 1.6. Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors

1. f est injective $\iff \ker(f) = \{0_E\}$.2. f est surjective $\iff \operatorname{Im}(f) = F$.

Proposition 1.7. Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors

1. Pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a

$$f^{-1}(f(G)) = G + \ker(f)$$

2. f est injective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel G de E , on a

$$f^{-1}(f(G)) = G$$

3. Pour tout sous-espace vectoriel H de F , on a

$$f(f^{-1}(H)) = H \cap \operatorname{Im}(f)$$

4. f est surjective, si et seulement si, pour tout sous-espace vectoriel H de F , on a

$$f(f^{-1}(H)) = H$$

1.3 Décomposition canonique - Théorème du rang

Théorème 1.8 (Décomposition canonique). Soient E et F deux K -espaces vectoriels quelconques, $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, $j : \operatorname{Im}(f) \rightarrow F$ l'injection canonique et $s : E \rightarrow E/\ker(f)$ la surjection canonique. Alors il existe un isomorphisme canonique

$$\bar{f} : E/\ker(f) \rightarrow \operatorname{Im}(f)$$

tel que $f = j \circ \bar{f} \circ s$,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow & \nearrow & \\ E/\ker(f) & \xrightarrow{\bar{f}} & \operatorname{Im}(f) \end{array}$$

Corollaire 1.9 (Théorème du rang). Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, F un K -espace vectoriel quelconque et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Corollaire 1.10. Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie, avec $\dim(E) = \dim(F)$, et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

2 Endomorphismes Automorphismes

Définition 2.1. Soit E un K -espace vectoriel.

1. Une application linéaire $u : E \rightarrow E$ s'appelle un **endomorphisme** de E .
2. Un endomorphisme bijectif s'appelle un **automorphisme** de E .

On désigne par $\mathcal{L}_K(E)$ l'ensemble de tous les endomorphismes de E et par $GL_K(E)$ l'ensemble de tous les automorphismes de E .

Définition 2.2. Soient $(A, +, \times)$ un anneau quelconque et K un corps commutatif. On dit que A est une **K -algèbre** (ou une algèbre sur K), s'il existe une loi externe,

$$\begin{aligned} K \times A &\rightarrow A \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

telle que,

1. $(A, +, \cdot)$ est un K -espace vectoriel.
2. $\forall \lambda \in K, \forall x \in A, \forall y \in A, \lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$

Proposition 2.3. Soit E un K -espace vectoriel. Alors

1. $(\mathcal{L}_K(E), +, \circ, \cdot)$ est une K -algèbre, appelée **algèbre des endomorphismes** de E .
2. $(GL_K(E), \circ)$ est un groupe, appelé **groupe linéaire** de E .

Théorème 2.4. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u : E \rightarrow E$ un endomorphisme de E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$.
2. $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$.
3. $\ker(u) = \ker(u^2)$.
4. $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$.

Théorème 2.5 (Noyaux et images itérés). Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Alors il existe un entier $p \geq 1$, tel que

1.
$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, k \geq p \implies \ker(u^k) = \ker(u^p) \\ \text{et} \\ \ker(u^{p-1}) \subsetneq \ker(u^p) \end{cases}$$
2.
$$\begin{cases} \forall k \in \mathbb{N}, k \geq p \implies \text{Im}(u^k) = \text{Im}(u^p) \\ \text{et} \\ \text{Im}(u^p) \subsetneq \text{Im}(u^{p-1}) \end{cases}$$
3.
$$E = \ker(u^p) \oplus \text{Im}(u^p)$$

3 Exemples d'endomorphismes remarquables

3.1 Projection sur un sous-espace vectoriel - Projecteurs

Définition 3.1. Soient E un K -espace vectoriel quelconque, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E .

1. On appelle **projection** sur F parallèlement à G , (ou de direction G), l'application p_F définie par

$$\begin{aligned} p_F : E = F \oplus G &\rightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\mapsto p_F(x) = x_1 \end{aligned}$$

2. On appelle **projecteur** de E , tout endomorphisme u de E , vérifiant $u^2 = u \circ u = u$.

Théorème 3.2. Soient E un K -espace vectoriel et u un projecteur de E , alors on a

1. $E = \text{Im}(u) \oplus \ker(u)$.
2. $\forall x \in E, x \in \text{Im}(u) \iff u(x) = x$.
3. Si on pose $F = \text{Im}(u)$ et $G = \ker(u)$, alors u est la projection sur F parallèlement à G .

3.2 Symétrie par rapport à un sous-espace vectoriel

Définition 3.3. Soient E un K -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E .

1. On appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G , (ou de direction G), l'application s_F définie par,

$$\begin{aligned} s_F : E = F \oplus G &\rightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\mapsto s_F(x) = x_1 - x_2 \end{aligned}$$

2. On appelle **symétrie vectorielle**, tout endomorphisme u de E , vérifiant $u^2 = u \circ u = \text{Id}_E$.

Théorème 3.4. Soient E un K -espace vectoriel et u une symétrie vectorielle de E . Alors,

1. $E = \ker(u - \text{Id}_E) \oplus \ker(u + \text{Id}_E)$.
2. Si on pose $F = \ker(u - \text{Id}_E)$ et $G = \ker(u + \text{Id}_E)$, alors u est la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

3.3 Affinités - Dilatations - Transvections

Définition 3.5. Soient E un K -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E , G un supplémentaire de F dans E et $\lambda \in K$. On appelle **affinité** de base F , de direction G et de rapport λ , l'application u définie par,

$$\begin{aligned} u : E = F \oplus G &\rightarrow E \\ x = x_1 + x_2 &\mapsto u(x) = x_1 + \lambda x_2 \end{aligned}$$

Définition 3.6. Soit E un K -espace vectoriel quelconque. On appelle **hyperplan** de E , tout sous-espace vectoriel H , tel que

$$\dim(E/H) = 1$$

Proposition 3.7. Soient E un K -espace vectoriel quelconque et u un endomorphisme de E , avec $u \neq \text{Id}_E$. Alors u est une dilatation de E , si et seulement si,

1. $\ker(u - \text{Id}_E)$ est un hyperplan de E .
2. $E = \ker(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Im}(u - \text{Id}_E)$.

Définition 3.8. Soient E un K -espace vectoriel quelconque et u un endomorphisme de E . On dit que u est une **transvection** de E , s'il existe un hyperplan H de E , tel que,

1. $\forall x \in H, u(x) = x$.
2. $\forall x \in E, u(x) - x \in H$.

Théorème 3.9. Soient E un K -espace vectoriel quelconque et u un endomorphisme de E avec $u \neq \text{Id}_E$. Alors u est une transvection de E , si et seulement si,

1. $\ker(u - \text{Id}_E)$ est un hyperplan de E .
2. $(u - \text{Id}_E)^2 = 0$.

4 Matrices

4.1 Opérations sur les matrices

Définition 4.1. Soit K un corps commutatif. Une **matrice** à coefficients dans K est une suite double finie $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ d'éléments de K .

Une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ est représentée par un tableau de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

On désigne par $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ l'ensemble de toutes les (m, n) -matrices à coefficients dans K et par $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K .

Définition 4.2. 1. **Addition:** Pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, et pour $B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, avec $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, on définit $A + B$ par,

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

2. **Multiplication externe:** Pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ et $\lambda \in K$, avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$, on définit $\lambda \cdot A$ par,

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

3. **Produit matriciel:** Pour $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$, avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, on définit le produit $A \times B$, qu'on note AB , par $AB = (c_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p}$,

$$\text{où } \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Proposition 4.3. Soit K un corps commutatif quelconque, n et m deux entiers quelconques. Alors,

1. $(\mathcal{M}_{m,n}(K), +, \cdot)$ est un K -espace vectoriel.
2. $(\mathcal{M}_n(K), +, \times, \cdot)$ est une K -algèbre.

4.2 Matrices élémentaires

Pour $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ et pour $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on désigne par E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la i -ème ligne et la j -ème colonne qui est égal à 1.

Définition 4.4. Les matrices E_{ij} sont appelées les **matrices élémentaires** de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

Proposition 4.5. Soit K un corps commutatif. Alors $\{E_{ij} : (i, j) \in \mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n\}$ forme une base de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$, appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$.

4.3 Matrices de transvection - Matrices de dilatation - Génération de $GL_n(K)$

Définition 4.6. Soit n un entier ≥ 2 .

1. Pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, avec $i \neq j$, et pour tout $\lambda \in K$, on définit une **matrice de transvection**, par

$$T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$$

2. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $\alpha \in K^*$, on définit une **matrice de dilatation**, par

$$D_i(\alpha) = I_n + (\alpha - 1)E_{ii}$$

Théorème 4.7. Le groupe $SL_n(K)$ est engendré par l'ensemble des matrices de transvection.

Corollaire 4.8. $GL_n(K)$ est engendré par l'ensemble des matrices de transvection et de dilatation.

4.4 Trace d'une matrice carrée

Définition 4.9. Soit K un corps commutatif. Pour $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, une matrice carrée à coefficients dans K , on définit la **trace** de A , qu'on note $\text{tr}(A)$, par

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Proposition 4.10. Soit K un corps commutatif. Alors

1. $\forall A \in \mathcal{M}_n(K), \forall B \in \mathcal{M}_n(K), \text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$.
2. $\forall \lambda \in K, \forall A \in \mathcal{M}_n(K), \text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A)$.
3. $\forall A \in \mathcal{M}_n(K), \forall B \in \mathcal{M}_n(K), \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Définition 4.11. Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(K)$ sont dites **semblables**, s'il existe une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(K)$, telle que $B = P^{-1}AP$.

Corollaire 4.12. Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(K)$ ont même trace.

5 Matrices et applications linéaires

5.1 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$ une base de F . Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, alors $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, il existe un unique m -uplet $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}) \in K^m$, tel que

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} e'_i$$

Définition 5.1. La matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ s'appelle la **matrice de f** par rapport aux bases β et β' . On écrit $A = \text{Mat}(f, \beta, \beta')$.

Proposition 5.2. Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$ une base de F . Soient $f : E \rightarrow F$ une application linéaire et $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ la matrice de f par rapport aux bases β et β' . Soit $x \in E$ avec $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ et soit $y = f(x)$ avec $y = \sum_{i=1}^m y_i e'_i$, alors

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

5.2 Matrice de passage Changement de base

Définition 5.3. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et soient $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E . La matrice $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ définie par

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$$

s'appelle la **matrice de passage** de la base β à la base β' .

Théorème 5.4 (Formule de changement de base). Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soient β et γ deux bases de E , β' et γ' deux bases de F , P la matrice de passage de β à γ et Q la matrice de passage de β' à γ' . Soient $A = \text{Mat}(f, \beta, \beta')$ et $B = \text{Mat}(f, \gamma, \gamma')$, alors on a

$$B = Q^{-1}AP$$

Corollaire 5.5. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Soient β et γ deux bases de E , $A = \text{Mat}(u, \beta)$, $B = \text{Mat}(u, \gamma)$ et P la matrice de passage de la base β à la base γ . Alors on a

$$B = P^{-1}AP$$

Définition 5.6. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E , β une base de E et $A = \text{Mat}(u, \beta)$. On définit la **trace** de u , qu'on note $\text{tr}(u)$, par

$$\text{tr}(u) = \text{tr}(A)$$

6 Rang d'une application linéaire - Rang d'une matrice

6.1 Définition et propriétés de base

Définition 6.1. 1. Soient E un K -espace vectoriel et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ un système de vecteurs de E . On définit le **rang** de $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, qu'on note $\text{rg}(v_1, v_2, \dots, v_n)$, par

$$\text{rg}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \dim(\text{Vect}(\{v_1, v_2, \dots, v_n\}))$$

2. Soient E et F deux K -espaces vectoriels de dimension finie et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On définit le **rang** de f , qu'on note $\text{rg}(f)$, par

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$, alors par définition, le rang de A est égal au rang de l'application linéaire définie par A ,

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$$

6.2 Rang et matrices équivalentes

Définition 6.2. Soit K un corps commutatif. Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ sont dites **équivalentes**, s'il existe deux matrices inversibles $P \in \mathcal{M}_n(K)$ et $Q \in \mathcal{M}_m(K)$, tel que

$$B = QAP$$

Lemme 6.3. Soient K un corps commutatif, A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ et r un entier ≥ 1 . Alors A est de rang r , si et seulement si, A est équivalente à la matrice en blocs $I(m, n, r)$ de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$, définie par,

$$I(m, n, r) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où I_r est la matrice identité d'ordre r .

Théorème 6.4. Soient K un corps commutatif, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. Alors

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) \iff A \text{ et } B \text{ sont équivalentes}$$