

Chapitre 6: Applications de la Réduction

1 Calcul de l'exponentielle d'une matrice

1.1 Norme d'une matrice

Proposition 1.1. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$N(A) = \sup \left\{ \frac{\|AX\|}{\|X\|} : X \in \mathbb{C}^n, X \neq 0 \right\} = \sup_{\substack{X \in \mathbb{C}^n \\ X \neq 0}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

où $\|\cdot\|$ est l'une des normes usuelles de $\mathbb{C}^n$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$. Alors

1. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $N(A) = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$.
2. L'application $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. $N(I) = 1$, où I est la matrice identité.
4. $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), N(AB) \leq N(A)N(B)$.

Remarque 1.1. 1. Dans la suite, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $N(A) = \|A\|$.

2. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$ est donc une algèbre normée de dimension finie, donc $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est complet, c'est-à-dire $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une algèbre de Banach.

1.2 Exponentielle d'une matrice

Proposition 1.2. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ est convergente.

Définition 1.3. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on définit l'**exponentielle** de A , par

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Exemple 1.1. 1. Si N est une matrice nilpotente d'indice q , alors on a

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N^k}{k!}$$

2. Si D est une matrice diagonale, avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors on a

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Proposition 1.4. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que $AB = BA$, alors on a

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$$

Proposition 1.5. Soit K un corps commutatif. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on pose $K[A] = \{P(A) : P \in K[X]\}$. Alors $K[A]$ est un K -espace vectoriel de dimension finie, avec $\dim(K[A]) = m$, où m est le degré du polynôme minimal de A .

Corollaire 1.6. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, tel que $\exp(A) = P(A)$.

2 Systèmes et équations différentiels linéaires

2.1 Définition d'un système différentiel

Définition 2.1. Un **système différentiel** est un système d'équations différentielles s'écrivant sous la forme suivante :

$$(S) \quad \begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

où pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction inconnue de classe C^1 et où $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2.1. Posons

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

alors $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ est une fonction inconnue de classe C^1 et le système (S) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t)$$

Par analogie à la dimension 1, on montre que la solution générale de ce système s'écrit sous la forme suivante :

$$X(t) = \exp(tA)X_0, \quad \text{avec } X_0 \in \mathbb{C}^n$$

2.2 Résolution pratique d'un système différentiel

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres de A , deux à deux distinctes, de multiplicités respectives $m_1, m_2, \dots, m_r$, alors d'après la remarque 6.3, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\exp(tA) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} \left(\sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{t^k (A - \lambda_i I)^k}{k!} \right) \pi_i$$

où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, π_i est la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$, où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a $N_i = \ker[(A - \lambda_i I)^{m_i}]$.

Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ et pour chaque $k \in \{1, 2, \dots, m_i - 1\}$, on pose

$$X_k = \frac{(A - \lambda_i I)^k}{k!} \pi_i X_0$$

alors on a $X_k \in N_i$, donc la solution générale du système s'écrit sous la forme :

$$X(t) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} P_i(t)$$

où pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $P_i(t) = \sum_{k=0}^{m_i-1} t^k X_k$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $m_i - 1$ et à coefficients dans N_i .

2.3 Solutions réelles

Soit P un polynôme à coefficients réels et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ un nombre complexe, alors on a $P(\bar{\lambda}) = \overline{P(\lambda)}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $P^{(k)}(\bar{\lambda}) = \overline{P^{(k)}(\lambda)}$. Donc si λ est une racine de P de multiplicité m , alors $\bar{\lambda}$ est une racine de P de multiplicité m .

On considère le système différentiel $(S) : X'(t) = AX(t)$, où A est une matrice réelle dont le polynôme caractéristique χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de χ_A de multiplicité m et soit $(v_1, \dots, v_m)$ une base de $\ker[(A - \lambda I)^m]$, alors on voit aisément que $(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$ est une base de $\ker[(A - \bar{\lambda} I)^m]$, alors d'après ce qui précède, on sait que tout $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, X_i et $\bar{X}_i$ sont deux solutions complexes de (S) , avec

$$X_i(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \lambda I)^k}{k!} v_i \quad \text{et} \quad \bar{X}_i(t) = e^{\bar{\lambda} t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k (A - \bar{\lambda} I)^k}{k!} \bar{v}_i$$

Donc $Y_i = \frac{X_i + \bar{X}_i}{2}$ et $Z_i = \frac{X_i - \bar{X}_i}{2i}$ sont des solutions réelles de (S) , ce sont la partie réelle et la partie imaginaire de X_i . Donc si on pose $\lambda = \alpha + i\beta$ et $v_i = v_{i1} + iv_{i2}$, où α, β sont des nombres réels et v_{i1}, v_{i2} sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors on aura

$$Y_i(t) = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) P_i(t) - \sin(\beta t) Q_i(t))$$

$$Z_i(t) = e^{\alpha t} (\sin(\beta t) P_i(t) + \cos(\beta t) Q_i(t))$$

Ainsi pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $aY_i + bZ_i$ est une solution réelle qui s'écrit sous la forme :

$$e^{\alpha t} (\cos(\beta t) P_i(t) + \sin(\beta t) Q_i(t))$$

où P_i et Q_i sont deux polynômes de degré $< m - 1$ et à coefficients dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les racines complexes non réelles de χ_A et soit $\mu_1, \dots, \mu_q$ les racines réelles de χ_A , alors on a

$$\chi_A = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i} (X - \overline{\lambda_i})^{m_i} \prod_{j=1}^q (X - \mu_j)^{n_j}$$

Alors la solution réelle générale de (S) s'écrit sous la forme suivante :

$$X(t) = \sum_{i=1}^p e^{\alpha_i t} (\cos(\beta_i t) P_i(t) + \sin(\beta_i t) Q_i(t)) + \sum_{j=1}^q e^{\mu_j t} R_j(t)$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on a $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$.

3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

3.1 Équation homogène

Définition 3.1. Une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants s'écrit sous la forme suivante :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

où $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ et où $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction inconnue.

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

Soit $Y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ la fonction définie par

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

et soit A la matrice carrée d'ordre n définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors l'équation (E) est équivalente au système différentiel $Y' = AY$.

Définition 3.2. L'équation

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$$

s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

Remarque 3.1. 1. Si $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$ n'a que des racines réelles $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ de multiplicités respectives $m_1, m_2, \dots, m_p$, alors d'après ce qui précède, la solution générale de l'équation

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

s'écrit sous la forme suivante :

$$y(t) = \sum_{i=1}^p e^{\lambda_i t} P_i(t)$$

où pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, P_i est un polynôme à coefficients réels, avec $\deg(P_i) < m_i - 1$.

2. Si les racines de $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$ ne sont pas toutes réelles, alors $r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$ s'écrit sous la forme :

$$\prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m_i} (X - \bar{\lambda}_i)^{m_i} \prod_{j=1}^q (X - \mu_j)^{n_j} = 0$$

donc d'après ce qui précède, la solution réelle du système s'écrit sous la forme :

$$X(t) = \sum_{i=1}^p e^{\alpha_i t} (\cos(\beta_i t) P_i(t) + \sin(\beta_i t) Q_i(t)) + \sum_{j=1}^q e^{\mu_j t} R_j(t)$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on a $\lambda_i = \alpha_i + i\beta_i$, P_i et Q_i sont des polynômes à coefficients réels, avec $\deg(P_i) < m_i - 1$ et $\deg(Q_i) < m_i - 1$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, q\}$, $\deg(R_i) < n_i - 1$.

Exemple 3.1. L'équation $y'' + by' + cy = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + br + c = 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4c$, alors trois cas sont possibles :

- $\Delta > 0$, alors $r^2 + br + c = 0$ possède deux racines réelles λ_1 et λ_2 , par suite la solution générale est définie par

$$y(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t}$$

- $\Delta = 0$, alors $r^2 + br + c = 0$ possède une racine double λ , par suite la solution générale est définie par

$$y(t) = (\alpha t + \beta) e^{\lambda t}$$

- $\Delta < 0$, alors $r^2 + br + c = 0$ possède deux racines complexes λ et $\bar{\lambda}$, donc si on pose $\lambda = \alpha + i\beta$, alors la solution réelle est définie par

$$y(t) = e^{\alpha t} (\gamma \cos(\beta t) + \delta \sin(\beta t))$$