

Chapitre 9: Endomorphismes d'un Espace Euclidien

1 Endomorphisme adjoint

Proposition 1.1. Soit E un espace euclidien. Alors pour tout endomorphisme u de E , il existe un unique endomorphisme v de E , tel que

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

Dans ce cas, v s'appelle l'**adjoint** de u et se note u^* .

Proposition 1.2. Soit E un espace euclidien. Alors on a

1. $\forall u \in \mathcal{L}(E), u^{**} = u$.
2. $\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall v \in \mathcal{L}(E), (u + v)^* = u^* + v^*$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathcal{L}(E), (\lambda u)^* = \lambda u^*$.
4. $\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall v \in \mathcal{L}(E), (v \circ u)^* = u^* \circ v^*$.
5. Si β est une base orthonormale de E et si $A = \text{Mat}(u, \beta)$, alors on a $\text{Mat}(u^*, \beta) = {}^t A$.

Proposition 1.3. Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E , alors

1. $\ker(u^*) = \text{Im}(u)^\perp$.
2. $\text{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$.
3. Si F est un sous-espace stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .

2 Projection orthogonale

2.1 Projection suivant une direction

Définition 2.1. Soient E un K -espace vectoriel quelconque, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E . On appelle **projection** sur F parallèlement à G , l'application p définie par:

$$p : E = F \oplus G \rightarrow E, \quad x = x_1 + x_2 \mapsto p(x) = x_1$$

Remarque 2.1. Si p est la projection sur F parallèlement à G , alors on a

1. $p^2 = p$, c'est-à-dire p est un projecteur de E .
2. $\text{Im}(p) = \{x \in E : p(x) = x\} = F$.
3. $\ker(p) = G$.

2.2 Définition et propriétés d'une projection orthogonale

Définition 2.2. Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E . On appelle **projection orthogonale** sur F , qu'on note p_F , la projection sur F parallèlement à $F^\perp$:

$$p_F : E = F \oplus F^\perp \rightarrow E, \quad x = x_1 + x_2 \mapsto p_F(x) = x_1$$

Proposition 2.3. Soient E un espace euclidien et u un projecteur de E , alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est une projection orthogonale.
2. $u^* = u$.
3. $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$.

Proposition 2.4. Soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ une base orthonormale de F , alors

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^p \langle x, v_i \rangle v_i$$

Corollaire 2.5. Soit E un espace euclidien.

1. Si F est une droite vectorielle de E , avec $F = \text{Vect}(x_0)$ et $x_0 \neq 0$, alors on a

$$\forall x \in E, \quad p_F(x) = \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0$$

2. Si H est un hyperplan de E et x_0 un vecteur non nul orthogonal à H , alors on a

$$\forall x \in E, \quad p_H(x) = x - \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0$$

2.3 Distance d'un point à un sous-espace vectoriel

Définition 2.6. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, $x \in E$ et A une partie non vide de E . On définit la **distance** de x à A , qu'on note $d(x, A)$, par

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

Théorème 2.7. Soient E un espace euclidien et F un sous-espace de E , alors

$$\forall x \in E, \quad d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

3 Symétrie orthogonale

3.1 Symétrie suivant une direction

Définition 3.1. Soient E un K -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et G un supplémentaire de F dans E . On appelle **symétrie** par rapport à F parallèlement à G , l'application s définie par:

$$s : E = F \oplus G \rightarrow E, \quad x = x_1 + x_2 \mapsto s(x) = x_1 - x_2$$

Remarque 3.1. Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G , alors on vérifie facilement que

1. s est un endomorphisme de E et $s^2 = \text{Id}_E$.
2. $F = \ker(s - \text{Id}_E)$ et $G = \ker(s + \text{Id}_E)$.
3. $s = 2p - \text{Id}_E$ où p est la projection sur F parallèlement à G .

3.2 Propriétés des symétries orthogonales

Définition 3.2. Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E . On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à F , qu'on note s_F , la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$:

$$s_F : E = F \oplus F^\perp \rightarrow E, \quad x = x_1 + x_2 \mapsto s_F(x) = x_1 - x_2$$

Proposition 3.3. Soient E un espace euclidien et u une symétrie de E , c'est-à-dire $u^2 = \text{Id}_E$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est une symétrie orthogonale.
2. $u^* = u$.
3. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

Corollaire 3.4. Soit E un espace euclidien.

1. Si F est une droite vectorielle avec $F = \text{Vect}(x_0)$ et $x_0 \neq 0$, alors pour tout $x \in E$, on a

$$s_F(x) = 2 \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0 - x$$

2. Si F est un hyperplan de E et si x_0 un vecteur non nul orthogonal à F , alors pour tout $x \in E$, on a

$$s_F(x) = x - 2 \frac{\langle x, x_0 \rangle}{\|x_0\|^2} x_0$$

4 Endomorphismes symétriques

4.1 Définition et propriétés des endomorphismes symétriques

Définition 4.1. Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E .

1. On dit que u est **symétrique**, si $u^* = u$.
2. On dit que u est **antisymétrique**, si $u^* = -u$.

Lemme 4.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, alors toutes les valeurs propres de A sont réelles.

Lemme 4.3. Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E et F un sous-espace vectoriel stable par u . Alors $F^\perp$ est stable par u .

Théorème 4.4. Soit E un espace euclidien. Alors tout endomorphisme symétrique de E , possède au moins une base orthonormale formée de vecteurs propres.

Corollaire 4.5. Pour toute matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice diagonale D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et il existe une matrice orthogonale P , telles que $A = PDP^{-1}$.

4.2 Formes bilinéaires symétriques d'un espace euclidien

Proposition 4.6. Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme symétrique de E et $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Alors l'application

$$f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \langle u(x), y \rangle$$

est une forme bilinéaire symétrique sur E et on a $\text{Mat}(f, \beta) = \text{Mat}(u, \beta)$.

Théorème 4.7. Soit E un espace euclidien. Alors pour toute forme bilinéaire symétrique f sur E , il existe un unique endomorphisme symétrique u , tel que

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x, y) = \langle u(x), y \rangle$$

5 Endomorphismes orthogonaux

5.1 Définition et propriétés de base

Définition 5.1. Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E . On dit que u est un **endomorphisme orthogonal**, si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Proposition 5.2. Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est un endomorphisme orthogonal.
2. $u^* \circ u = u \circ u^* = \text{Id}_E$.
3. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

5.2 Cas d'un espace euclidien de dimension 2

Théorème 5.3. Soient E un espace euclidien de dimension 2 et u un endomorphisme orthogonal de E .

1. Si $\det(u) = 1$, alors il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, tel que la matrice A de u par rapport à n'importe quelle base orthonormale directe de E s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, u s'appelle la **rotation d'angle θ** .

2. Si $\det(u) = -1$, alors u est une symétrie orthogonale et il existe une base orthonormale de E , dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5.3 Cas d'un espace euclidien de dimension 3

Lemme 5.4. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un endomorphisme orthogonal de E . Alors $\det(u)$ est une valeur propre de u .

Théorème 5.5. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u un endomorphisme orthogonal de E , avec $u \neq \pm \text{Id}_E$.

1. Si $\det(u) = 1$, alors 1 est une valeur propre de u et si e_1 est un vecteur propre unitaire associé à 1, alors il existe un unique $\theta \in]-\pi, \pi]$, tel que la matrice A de u par rapport à n'importe quelle base orthonormale (e_1, e_2, e_3) , dont le premier vecteur est égal à e_1 , s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, u s'appelle la **rotation d'angle θ et d'axe Δ** , avec $\Delta = \ker(u - \text{Id}_E)$.

2. Si $\det(u) = -1$ et si 1 est une valeur propre de u , alors u est une symétrie orthogonale par rapport à $F = \ker(u - \text{Id}_E)$.
3. Si $\det(u) = -1$ et 1 n'est pas valeur propre de u , alors -1 est une valeur propre de u . Soit $x_0 \in E$, tel que $u(x_0) = -x_0$ et $\|x_0\| = 1$, alors $u = r \circ s = s \circ r$, où r est la rotation d'axe Δ , avec $\Delta = \text{Vect}(x_0)$ et s la symétrie orthogonale par rapport à $\Delta^\perp$. Dans ce cas, u s'appelle une **symétrie-rotation**.

6 Décomposition polaire

Proposition 6.1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est symétrique positive.

2. Il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $A = {}^tMM$.
3. Il existe une matrice unique $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, appelée **racine carrée** de A , telle que $A = B^2$.

Théorème 6.2 (Décomposition polaire). Pour toute matrice A de $GL_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple (Ω, S) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec Ω une matrice orthogonale et S une matrice symétrique définie positive, telles que $A = \Omega S$.

7 Décomposition QR

Théorème 7.1 (Décomposition QR). Pour toute matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe deux matrices uniques Q et R dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs, telles que $A = QR$.