

Chapitre 8: Espaces Euclidiens

1 Produit scalaire

1.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 1.1. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique f .

1. On dit que f est **positif**, si pour tout $x \in E$, on a $f(x, x) \geq 0$.
2. On dit que f est **définie positive**, si

$$\forall x \in E, x \neq 0 \implies f(x, x) > 0$$

3. On appelle **produit scalaire** sur E , toute forme bilinéaire symétrique définie positive.
4. Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire s'appelle un **espace préhilbertien réel**.
5. Un espace préhilbertien réel de dimension finie s'appelle un **espace euclidien**.

Remarque 1.1. 1. Tout produit scalaire est non dégénéré.

2. Une forme quadratique q sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E est dite **positive** (resp. **définie positive**), si la forme polaire associée à q est positive (resp. définie positive).
3. Une matrice symétrique réelle A est dite **positive** (resp. **définie positive**), si la forme quadratique définie par la matrice A est positive (resp. définie positive).

Exemple 1.1. 1. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

2. Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(A, B) = \text{tr}({}^tAB)$$

Alors, f définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. $C([a, b], \mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$, est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire suivant :

$$\forall f \in C([a, b], \mathbb{R}), \forall g \in C([a, b], \mathbb{R}), \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

Proposition 1.2. Soit E un espace euclidien. Alors,

1. E possède au moins une base orthonormale.
2. Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $E = F \oplus F^\perp$.
3. Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $F^{\perp\perp} = F$.

1.2 Notations et règles de calcul

Soit E un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire. Dans toute la suite, nous adoptons les notations suivantes :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle x, y \rangle = f(x, y) \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

Règles de calcul :

1. $\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$
2. $\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$

3. **Identité du parallélogramme :**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

4. **Identité de polarisation :**

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

1.3 Utilisation des bases orthonormales

Proposition 1.3. Soit E un espace euclidien de dimension n , muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Alors on a

- 1.

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

- 2.

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle$$

- 3.

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle^2$$

4. Si u est un endomorphisme de E et si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de u par rapport à la base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors on a

$$a_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle$$

2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 2.1. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique positive, alors on a

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad f(x, y)^2 \leq f(x, x)f(y, y)$$

Corollaire 2.2. Soit E un espace préhilbertien réel, alors on a

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Proposition 2.3. Soit E un espace préhilbertien réel, alors on a

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \iff (x, y) \text{ est lié}$$

Exemple 2.1. On considère l'application $\Phi : (\mathbb{R}_+^*)^n \rightarrow \mathbb{R}^*$ définie pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, par

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right)$$

Alors Φ possède un minimum et ce minimum est atteint par une infinité d'éléments de $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

En effet, pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, posons $y_i = \sqrt{x_i}$ et $z_i = \frac{1}{\sqrt{x_i}}$, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(y_1 z_1 + y_2 z_2 + \dots + y_n z_n)^2 \leq (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2)$$

On en déduit aisément que pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, on a $n^2 \leq \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$. D'autre part, on remarque que $\Phi(1, 1, \dots, 1) = n^2$, donc n^2 est un minimum de Φ .

Définition 2.4. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle **norme** sur E , toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,
3. $\forall x \in E, \forall y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Corollaire 2.5. Soit E un espace préhilbertien réel, alors l'application définie par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est une norme sur E , appelée **norme euclidienne** sur E .

3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème 3.1. Soient E un espace euclidien de dimension n et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base quelconque de E . Alors il existe une base orthonormale unique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E , telle que :

1. Pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_j) = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_j)$$

2. Pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $\langle v_j, e_j \rangle > 0$.

Proof. On construit les vecteurs $e_1, e_2, \dots, e_n$ par récurrence de la manière suivante :

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \quad e_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1}{\|v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1\|}, \quad \dots$$

□

Proposition 3.2 (Inégalité d'Hadamard). Soient E un espace euclidien orienté de dimension n et $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ un système de vecteurs de E , alors

$$|\det(v_1, v_2, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \|v_2\| \cdots \|v_n\|$$

4 Changement de bases orthonormales - Orientation

Lemme 4.1. Soit E un espace euclidien de dimension n , muni d'une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Soit $(v_1, v_2, \dots, v_p)$ un système quelconque de vecteurs de E , tels que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, on a $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$, alors on a

$${}^tAA = (\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}$$

Théorème 4.2. Soient E un espace euclidien de dimension n , β et γ deux bases orthonormales de E et P la matrice de passage de β à γ , alors on a

$${}^tPP = I$$

Définition 4.3. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** si ${}^tAA = I$.

Remarque 4.1. 1. Si A est orthogonale, alors A est inversible et on a $A^{-1} = {}^tA$.

2. Si A est orthogonale, alors $\det(A) = \pm 1$.

Définition 4.4. Un espace euclidien orienté est un couple (E, β) , où E est un espace euclidien et β une base orthonormale de E fixée.

5 Produit vectoriel

5.1 Formes linéaires d'un espace euclidien

Proposition 5.1. Soit E un espace euclidien, alors pour toute forme linéaire φ de E , il existe un unique $y \in E$, tel que pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$.

5.2 Définition et propriétés du produit vectoriel

Théorème 5.2. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors pour tout couple de vecteurs (u, v) de E , il existe un unique vecteur w de E , tel que

$$\forall x \in E, \quad \det(u, v, x) = \langle x, w \rangle$$

Dans ce cas, w s'appelle le **produit vectoriel** de u et v et se note $u \wedge v$.

Remarque 5.1. 1. Le produit vectoriel $u \wedge v$ de deux vecteurs u et v est caractérisé par

$$\forall x \in E, \quad \det(u, v, x) = \langle x, u \wedge v \rangle$$

2. Si (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale directe de E , alors on a

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$$

Proposition 5.3. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors on a

1. L'application de $E \times E$ vers E qui à $(u, v) \in E \times E$ fait correspondre $u \wedge v$ est linéaire antisymétrique.
2. $\forall u \in E, \forall v \in E, \langle u, u \wedge v \rangle = \langle v, u \wedge v \rangle = 0$.
3. $u \wedge v = 0 \iff (u, v)$ est lié.

Proposition 5.4 (Identité de Lagrange). Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors

$$\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$$

Proposition 5.5 (Formule du double produit vectoriel). Soient E un espace euclidien, u, v et w trois vecteurs de E , alors on a

$$u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$$