

Chapitre 11: Espaces Hermitiens

1 Produit hermitien

1.1 Définition et exemples

Définition 1.1. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et h une forme hermitienne sur E .

1. On dit que h est **positif**, si pour tout $x \in E$, on a $h(x, x) \geq 0$.

2. On dit que h est **définie positive**, si pour tout $x \in E$, on a

$$x \neq 0 \implies h(x, x) > 0$$

3. On appelle **produit hermitien** sur E , toute forme hermitienne sur E définie positive.

4. Un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'un produit hermitien s'appelle un **espace préhilbertien complexe**.

5. Un espace préhilbertien complexe de dimension finie s'appelle un **espace hermitien**.

Exemple 1.1. 1. Le produit hermitien usuel sur $\mathbb{C}^n$ est défini par :

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \forall y \in \mathbb{C}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$$

avec $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

2. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2, \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^* B)$$

Alors, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit hermitien sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. $C([a, b], \mathbb{C})$, le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ vers $\mathbb{C}$, est un espace préhilbertien complexe pour le produit hermitien suivant :

$$\forall f \in C([a, b], \mathbb{C}), \forall g \in C([a, b], \mathbb{C}), \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

Proposition 1.2. Soit E un espace hermitien. Alors,

1. E possède au moins une base orthonormale.

2. Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $E = F \oplus F^\perp$.

3. Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $F^{\perp\perp} = F$.

1.2 Notations et règles de calcul

Soit E un espace préhilbertien complexe muni d'un produit hermitien. Dans toute la suite, nous adoptons les notations suivantes :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle x, y \rangle = h(x, y) \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

Règles de calcul :

$$1. \quad \forall x \in E, \forall y \in E, \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle).$$

$$2. \quad \forall x \in E, \forall y \in E, \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle).$$

3. **Identité du parallélogramme :**

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

4. **Identité de polarisation :**

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k \|x + i^k y\|^2$$

1.3 Utilisation des bases orthonormales

Soit E un espace hermitien de dimension n , muni d'une base orthonormale $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Alors on a

1.

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$$

2.

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle \overline{\langle y, e_i \rangle}$$

3.

$$\forall x \in E, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i \rangle|^2$$

4. Si u est un endomorphisme de E et si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de u par rapport à la base orthonormale β , alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$a_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle$$

2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 2.1. Soit E un espace préhilbertien complexe, alors on a

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Proposition 2.2. Soit E un espace préhilbertien complexe, alors on a

$$|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\| \iff (x, y) \text{ est lié}$$

Corollaire 2.3. Soit E un espace préhilbertien complexe, alors l'application définie par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

est une norme sur E , appelée **norme hermitienne** sur E .

3 Endomorphismes d'un espace hermitien

3.1 Endomorphisme adjoint

Proposition 3.1. Soit E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme u de E , il existe un unique endomorphisme v de E , tel que

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$$

Dans ce cas, v s'appelle l'**adjoint** de u et se note u^* .

Proposition 3.2. Soit E un espace hermitien. Alors on a

1. $\forall u \in \mathcal{L}(E), u^{**} = u.$
2. $\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall v \in \mathcal{L}(E), (u + v)^* = u^* + v^*.$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall u \in \mathcal{L}(E), (\lambda u)^* = \bar{\lambda} u^*.$
4. $\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall v \in \mathcal{L}(E), (v \circ u)^* = u^* \circ v^*.$
5. Si β est une base orthonormale de E et si $A = \text{Mat}(u, \beta)$, alors on a $\text{Mat}(u^*, \beta) = A^*.$

Proposition 3.3. Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E , alors

1. $\ker(u^*) = \text{Im}(u)^\perp.$
2. $\text{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp.$
3. Si F est un sous-espace stable par u , alors $F^\perp$ est stable par $u^*.$

3.2 Endomorphismes normaux

Définition 3.4. Soit E un espace hermitien, on dit qu'un endomorphisme u de E est **normal**, si $u^* \circ u = u \circ u^*.$

Lemme 3.5. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, telle que $\text{tr}(AA^*) = 0.$ Alors $A = 0.$

Proposition 3.6. Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme normal de E , alors

1. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|.$
2. $\ker(u) = \ker(u^*).$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \ker(\lambda \text{Id}_E - u) = \ker(\bar{\lambda} \text{Id}_E - u^*).$
4. Si F est un sous-espace stable par u , alors $F^\perp$ est stable par $u.$

Théorème 3.7. Soit E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme normal de E , il existe une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de $u.$

Proposition 3.8. Soient E un espace hermitien, β et γ deux bases orthonormales de E . Soit P la matrice de passage de la base β à la base γ , alors on a $P^*P = I.$

Remarque 3.1. 1. Une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $P^*P = I$, s'appelle une **matrice unitaire**.

2. D'après le théorème 11.3.1, pour toute matrice normale A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice diagonale D dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et il existe une matrice unitaire P , telles que $A = PDP^*.$

3.3 Endomorphismes hermitiens

Définition 3.9. Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E .

1. On dit que u est **hermitien** (ou **autoadjoint**), si $u^* = u$.
2. On dit que u est **antihermitien**, si $u^* = -u$.

Proposition 3.10. Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme hermitien de E . Alors toutes les valeurs propres de u sont réelles.

Théorème 3.11. Soient E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme hermitien u , il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

3.4 Endomorphismes unitaires

Définition 3.12. Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E . On dit que u est **unitaire**, si $u^*u = \text{Id}_E$.

Remarque 3.2. 1. Soit β une base orthonormale de E et soit $A = \text{Mat}(u, \beta)$, alors u est unitaire, si et seulement si, A est une matrice unitaire.

2. Tout endomorphisme unitaire u est inversible et on a $u^{-1} = u^*$.
3. Tout endomorphisme unitaire est normal.

Proposition 3.13. Soient E un espace hermitien et u un endomorphisme de E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est unitaire.
2. $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.
3. $\forall x \in E, \forall y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

Remarque 3.3. Soit E un espace hermitien, u un endomorphisme unitaire de E et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u , alors $|\lambda| = 1$.

Proposition 3.14. Soit E un espace hermitien et u un endomorphisme de E . Alors u est unitaire, si et seulement si, l'image par u d'une base orthonormale de E est une base orthonormale de E .

Théorème 3.15. Soit E un espace hermitien. Alors pour tout endomorphisme unitaire u , il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice U de u s'écrit sous la forme :

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

où $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$.