

Chapitre 1: Espaces Vectoriels

1 Définitions et propriétés de base

1.1 Espace vectoriel sur un corps quelconque

Définition 1.1. Soient $(E, +)$ un groupe commutatif et $(K, +, \times)$ un corps commutatif. On dit que E est un **K -espace vectoriel** ou un **espace vectoriel sur K** , s'il existe une application de $K \times E$ vers E , appelée **loi externe** sur E , qui à $(\alpha, x) \in K \times E$ fait correspondre $\alpha \cdot x$, vérifiant les axiomes suivants :

1. $\forall x \in E, 1_K \cdot x = x$.
2. $\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E, (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$.
3. $\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E, (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$.
4. $\forall \alpha \in K, \forall x \in E, \forall y \in E, \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$.

Dans ce cas, les éléments de E sont appelés des **vecteurs** et se notent $x, y, z, \dots$, tandis que les éléments de K sont appelés des **scalaires** et se notent $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \dots$

1.2 Conséquences de la définition

Soit E un K -espace vectoriel, alors on a les règles de calcul suivantes :

1. $\forall x \in E, 0_K \cdot x = 0_E$.
2. $\forall \lambda \in K, \lambda \cdot 0_E = 0_E$.
3. $\forall \lambda \in K, \forall x \in E, \lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E$.

Proof. 1. D'après l'axiome ii) de la définition, nous avons

$$0_K \cdot x = (0_K + 0_K) \cdot x = 0_K \cdot x + 0_K \cdot x$$

$$\text{donc } 0_K \cdot x = 0_E.$$

2. D'après l'axiome iv) de la définition, nous avons

$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E$$

$$\text{donc } \lambda \cdot 0_E = 0_E.$$

3. ($\Rightarrow$) Supposons que $\lambda \cdot x = 0_E$ et $\lambda \neq 0_K$ et montrons que $x = 0_E$. Puisque $\lambda \cdot x = 0_E$, alors

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda^{-1} \cdot 0_E = 0_E$$

or d'après l'axiome iii) de la définition, nous avons

$$\lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot x) = (\lambda^{-1} \lambda) \cdot x = 1_K \cdot x$$

donc d'après l'axiome i) de la définition, on a $x = 0_E$. ($\Leftarrow$) Déjà vu.

□

1.3 Exemples fondamentaux

1. Soient $(L, +, \times)$ un corps commutatif et K un sous-corps de L . Alors L peut être considéré comme un K -espace vectoriel pour la loi externe définie par

$$\begin{aligned} K \times L &\rightarrow L \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda \cdot x = \lambda \times x \end{aligned}$$

Par exemple, $L = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{R}$, $L = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{Q}$ ou $L = \mathbb{C}$ et $K = \mathbb{Q}$. En particulier, tout corps K peut être considéré comme un espace vectoriel sur lui-même.

2. Soit K un corps commutatif, alors pour tout entier $n \geq 1$, K^n est un K -espace vectoriel pour la loi externe,

$$\begin{aligned} K \times K^n &\rightarrow K^n \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3. Soient K un corps commutatif et $K[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans K . Alors $K[X]$ est un K -espace vectoriel pour la loi externe,

$$\begin{aligned} K \times K[X] &\rightarrow K[X] \\ (\lambda, P) &\mapsto \lambda \cdot P = \sum_{i=0}^m (\lambda a_i) X^i \end{aligned}$$

où $P = \sum_{i=0}^m a_i X^i$.

4. Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des espaces vectoriels sur le même corps K . Alors le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est un K -espace vectoriel pour la loi externe définie par

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \dots, \lambda \cdot x_n)$$

$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ s'appelle l'**espace vectoriel produit** des K -espaces vectoriels $E_1, E_2, \dots, E_n$.

5. Soient E un K -espace vectoriel, A un ensemble non vide quelconque et E^A l'ensemble de toutes les applications de A vers E . Alors E^A est un K -espace vectoriel pour la loi externe,

$$\begin{aligned} K \times E^A &\rightarrow E^A \\ (\lambda, f) &\mapsto \lambda \cdot f \end{aligned}$$

où $\lambda \cdot f$ est l'application de A vers E définie par,

$$\forall a \in A, (\lambda \cdot f)(a) = \lambda \cdot f(a)$$

Rappelons aussi que si f et g sont deux applications de A vers E , alors $f + g$ est l'application de A vers E définie par,

$$\forall a \in A, (f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et exemples

Définition 2.1. Soient E un K -espace vectoriel et F une partie de E . On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E , si

1. $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$.

2. $\forall \lambda \in K, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F$.

Proposition 2.2. Soient E un K -espace vectoriel et F une partie de E . Alors F est un sous-espace vectoriel de E , si, et seulement si,

1. $F \neq \emptyset$.

2. $\forall x \in F, \forall y \in F, x + y \in F$.

3. $\forall \lambda \in K, \forall x \in F, \lambda \cdot x \in F$.

Proof. ($\Rightarrow$) Trivial.

($\Leftarrow$) Supposons que F vérifie i), ii) et iii) et montrons que $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$. Donc on doit vérifier que,

$$F \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \forall x \in F, \forall y \in F, x - y \in F.$$

Soient $x \in F$ et $y \in F$. D'après iii), $(-1_K) \cdot y \in F$ avec $(-1_K) \cdot y = -y$, donc d'après ii), $x + (-y) \in F$. $\square$

2.2 Exemples

1. Pour tout K -espace vectoriel E , les parties $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E .

2. Soit K un corps commutatif. Pour tout entier $n \geq 0$, on désigne par $K_n[X]$ la partie de $K[X]$ définie par,

$$K_n[X] = \{P \in K[X] : \deg(P) \leq n\}$$

Alors $K_n[X]$ est un K -espace vectoriel.

3. L'ensemble F des suites réelles qui tendent vers zéro à l'infini, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,

$$F = \{(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$$

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $C(I, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues de I vers $\mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

2.3 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

2.3.1 Intersection

Proposition 2.3. Soit E un K -espace vectoriel, alors l'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

2.3.2 Réunion

Proposition 2.4. Soient E un K -espace vectoriel quelconque, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E , si et seulement si, $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.

2.3.3 Somme

Soient E un K -espace vectoriel, $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E , avec $n \geq 2$. On définit la partie de E , notée $F_1 + F_2 + \dots + F_n$, par

$$x \in F_1 + F_2 + \dots + F_n \iff \exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n, \text{ tel que } x = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

Proposition 2.5. $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est un sous-espace vectoriel de E , appelé **sous-espace vectoriel somme** des sous-espaces vectoriels $F_1, F_2, \dots, F_n$.

2.3.4 Somme directe

Définition 2.6. Soient E un K -espace vectoriel et $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . On dit que la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est **directe**, si pour tout $x \in F_1 + F_2 + \dots + F_n$, il existe un unique

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n, \text{ tel que } x = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Dans le cas où la somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est directe, on la note,

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_n \quad \text{ou encore} \quad \bigoplus_{i=1}^n F_i$$

Lemme 2.7. La somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est directe, si et seulement si, pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$, on a

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \implies x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

Théorème 2.8. La somme $F_1 + F_2 + \dots + F_n$ est directe, si et seulement si,

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad F_i \cap (F_{i+1} + \dots + F_n) = \{0\}$$

2.4 Sous-espaces supplémentaires

Définition 2.9. Soient E un K -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E . On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E , si,

1. La somme $F + G$ est directe.
2. $E = F \oplus G$.

Théorème 2.10. Soit E un K -espace vectoriel quelconque. Alors tout sous-espace vectoriel de E possède au moins un supplémentaire.

3 Espace vectoriel quotient

Proposition 3.1. Soient E un K -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et E/F le groupe quotient de E par F . Alors E/F est un K -espace vectoriel pour la loi externe :

$$K \times E/F \rightarrow E/F \quad (\lambda, \bar{x}) \mapsto \lambda \cdot \bar{x} = \overline{\lambda \cdot x}$$

appelé **espace vectoriel quotient** de E par F .

4 Partie génératrice – Partie libre – Base

4.1 Combinaisons linéaires - Partie génératrice

Définition 4.1. Soient E un K -espace vectoriel et A une partie non vide de E . On dit qu'un élément x de E est une **combinaison linéaire** d'éléments de A , s'il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$ éléments de A et il existe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ éléments de K , tels que

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

Proposition 4.2. Soient E un K -espace vectoriel et A une partie non vide de E . Alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires d'éléments de A est un sous-espace vectoriel de E , appelé **sous-espace vectoriel engendré par A** et se note $\text{Vect}(A)$.

Définition 4.3. Soient E un K -espace vectoriel et A une partie de E . On dit que A est une **partie génératrice** de E , si $\text{Vect}(A) = E$.

4.2 Partie libre

Définition 4.4. Soient E un K -espace vectoriel et L une partie non vide de E .

1. Si L est finie, $L = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, on dit que L est **libre**, si pour tout $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$, on a

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

2. Si L est infinie, on dit que L est libre, si toute partie finie de L est libre.
3. Une partie de E qui n'est pas libre est dite **liée**.

4.3 Base

Définition 4.5. Soient E un K -espace vectoriel et B une partie quelconque de E . On dit que B forme une **base** de E , si B est à la fois une partie libre et génératrice.

Lemme 4.6. Soient E un K -espace vectoriel, L une partie libre de E et $x \in E$, alors

$$x \notin \text{Vect}(L) \iff L \cup \{x\} \text{ est libre}$$

Théorème 4.7 (Caractérisation d'une base). Soient E un K -espace vectoriel et B une partie de E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. B forme une base de E .
2. B est une partie génératrice minimale de E .
3. B est une partie libre maximale de E .

5 Espaces vectoriels de dimension finie

5.1 Définition et exemples

Définition 5.1. Soit E un K -espace vectoriel. On dit que E est de **dimension finie** sur K , si E possède au moins une partie génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie**.

5.2 Théorème de la dimension finie

Lemme 5.2. Soient E un K -espace vectoriel, A et B deux parties de E et n un entier naturel, tels que

1. $\text{Card}(A) = n$ et $\text{Card}(B) = n + 1$.
2. Tout élément de B est combinaison linéaire d'éléments de A ou autrement dit $B \subseteq \text{Vect}(A)$.

Alors B est liée.

Corollaire 5.3. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et A une partie génératrice finie de E . Alors pour toute partie libre L de E , on a

$$\text{Card}(L) \leq \text{Card}(A)$$

Théorème 5.4 (Théorème de la dimension finie). Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie, alors

1. Toute base de E est de cardinal fini.
2. Toutes les bases de E ont même cardinal.

Définition 5.5. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Le cardinal commun à toutes les bases de E , s'appelle la **dimension** de E sur K et se note $\dim_K(E)$ ou tout simplement $\dim(E)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

5.3 Théorème de la base incomplète

Théorème 5.6. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, A une partie génératrice quelconque de E et L une partie libre de E , telle que $L \subseteq A$. Alors il existe une base B de E , telle que

$$L \subseteq B \subseteq A$$

5.4 Identités remarquables concernant la dimension

Proposition 5.7. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Alors

1. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors on a

$$E = F \oplus G \implies \dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

2. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors on a

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

3. Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors on a

$$\dim(E/F) = \dim(E) - \dim(F)$$