

Chapitre 7: Formes Bilinéaires Symétriques - Formes Quadratiques

1 Formes bilinéaires symétriques

1.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 1.1. Soit E un K -espace vectoriel, où K est un corps commutatif.

1. On dit qu'une application $f : E \times E \rightarrow K$ est une **forme bilinéaire** sur E , si

- (a) Pour tout $y \in E$, l'application

$$\varphi_y : E \rightarrow K, \quad x \mapsto \varphi_y(x) = f(x, y)$$

est une forme linéaire sur E .

- (b) Pour tout $x \in E$, l'application

$$\psi_x : E \rightarrow K, \quad y \mapsto \psi_x(y) = f(x, y)$$

est une forme linéaire sur E .

2. Une forme bilinéaire f sur E est dite **symétrique**, si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad f(y, x) = f(x, y)$$

3. Une forme bilinéaire f sur E est dite **antisymétrique**, si

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad f(y, x) = -f(x, y)$$

Remarque 1.1. 1. Si f est une forme bilinéaire quelconque, alors

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y)$$

$$\forall \alpha \in K, \forall \beta \in K, \forall x \in E, \forall y \in E, \quad f(\alpha x, \beta y) = \alpha \beta f(x, y)$$

2. Si f est une forme bilinéaire symétrique, alors

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad f(x + y, x + y) = f(x, x) + 2f(x, y) + f(y, y)$$

3. Si f est antisymétrique, alors

$$\forall x \in E, \quad f(x, x) = 0$$

On désigne par $\mathcal{L}_2(E)$ l'ensemble de toutes les formes bilinéaires sur E , $\mathcal{S}_2(E)$ l'ensemble de toutes les formes bilinéaires symétriques sur E et $\mathcal{A}_2(E)$ celui de toutes les formes bilinéaires antisymétriques sur E .

Proposition 1.2. Soit E un K -espace vectoriel quelconque, alors

1. $\mathcal{L}_2(E)$ est un K -espace vectoriel.
2. Si K est un corps de caractéristique $\neq 2$, alors on a

$$\mathcal{L}_2(E) = \mathcal{S}_2(E) \oplus \mathcal{A}_2(E)$$

1.2 Matrice d'une forme bilinéaire

Définition 1.3. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et f une forme bilinéaire sur E . On appelle **matrice de f** par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ définie par

$$a_{ij} = f(e_i, e_j)$$

Remarque 1.2. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

1. Si f est une forme bilinéaire, alors $A = (f(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de f par rapport à la base β .
2. Réciproquement, soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K et soit $f : E \times E \rightarrow K$, l'application définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j$$

où $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, alors f définit une forme bilinéaire sur E , dont la matrice par rapport à la base β est égale à A .

3. Si f est une forme bilinéaire sur E et si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est la matrice de f par rapport à la base β , alors

- (a) f est symétrique $\iff {}^t A = A$.
- (b) f est antisymétrique $\iff {}^t A = -A$.

1.3 Écriture matricielle

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E , $f : E \times E \rightarrow K$ une forme bilinéaire sur E et A la matrice de f par rapport à la base β . Pour chaque $x \in E$ avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on pose

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Alors f possède une expression matricielle sous la forme :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x, y) = {}^t X A Y$$

1.4 Changement de base

Proposition 1.4. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\beta' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E , f une forme bilinéaire sur E , A et B sont respectivement les matrices de f par rapport aux bases β et β' . Soit P la matrice de passage de la base β à la base β' , alors on a

$$B = {}^t P A P$$

1.5 Rang d'une forme bilinéaire

Définition 1.5. Soit K un corps commutatif. Deux matrices carrées A et B à coefficients dans K sont dites **congruentes**, s'il existe une matrice inversible P , tel que $B = {}^t P A P$.

Remarque 1.3. Deux matrices congruentes sont équivalentes, donc deux matrices congruentes ont même rang. Ainsi, la définition suivante est justifiée :

Définition 1.6. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E , $f : E \times E \rightarrow K$ une forme bilinéaire sur E et A la matrice de f par rapport à la base β . On définit le **rang** de f , noté $\text{rg}(f)$, par :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(A)$$

1.6 Formes bilinéaires symétriques non dégénérées

Définition 1.7. Soient E un K -espace vectoriel quelconque et f une forme bilinéaire symétrique sur E . On considère l'application $\Phi : E \rightarrow E^*$ définie par :

$$\forall y \in E, \Phi(y) = \varphi_y \text{ où } \forall x \in E, \varphi_y(x) = f(x, y)$$

Si Φ est injective, on dit que f est **non dégénérée**.

Proposition 1.8. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, β une base de E , f une forme bilinéaire symétrique sur E et A la matrice de f par rapport à la base β . Alors,

$$f \text{ est non dégénérée} \iff \det(A) \neq 0$$

1.7 Orthogonalité

Définition 1.9. Soient E un K -espace vectoriel quelconque, f une forme bilinéaire symétrique sur E . Soit A une partie non vide de E , on définit l'**orthogonale** de A , par rapport à la forme bilinéaire f , notée $A^\perp$, par :

$$\forall y \in E, y \in A^\perp \iff \forall x \in A, f(x, y) = 0$$

Proposition 1.10. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique sur E , alors pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a

1. $\dim(F) + \dim(F^\perp) \geq \dim(E)$.
2. Si de plus f est non dégénérée, alors on a

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$$

Corollaire 1.11. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et f une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E . Alors pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $F^{\perp\perp} = F$.

1.8 Isotropie

Définition 1.12. Soit E un K -espace vectoriel et f une forme bilinéaire symétrique sur E .

1. On dit que deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux**, si $f(x, y) = 0$.
2. On dit qu'un vecteur $x \in E$ est **isotrope**, si $f(x, x) = 0$.
3. Un sous-espace vectoriel F de E est dit **isotrope**, si $F \cap F^\perp \neq \{0\}$.
4. Un sous-espace vectoriel F de E est dit **totalelement isotrope**, si $F \subseteq F^\perp$.

Théorème 1.13. Soient E un K -espace vectoriel quelconque, f une forme bilinéaire symétrique sur E et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors

$$E = F \oplus F^\perp \iff F \text{ est non isotrope}$$

1.9 Bases orthogonales

Définition 1.14. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et f une forme bilinéaire symétrique sur E . On dit qu'une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est **orthogonale**, si

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j \implies f(e_i, e_j) = 0$$

Lemme 1.15. Soient E un K -espace vectoriel et f une forme bilinéaire symétrique sur E . Alors

$$f \text{ est identiquement nulle} \iff \forall x \in E, f(x, x) = 0$$

Théorème 1.16. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Alors toute forme bilinéaire symétrique f sur E , possède au moins une base orthogonale.

2 Formes quadratiques

2.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 2.1. Soit E un K -espace vectoriel. On dit qu'une application $q : E \rightarrow K$ est une **forme quadratique** sur E , s'il existe une forme bilinéaire f , telle que

$$\forall x \in E, \quad q(x) = f(x, x)$$

Proposition 2.2. Soient E un K -espace vectoriel et q une forme quadratique sur E . Alors il existe une forme bilinéaire symétrique unique f sur E , telle que

$$\forall x \in E, \quad q(x) = f(x, x)$$

Dans ce cas, f s'appelle la **forme polaire** associée à la forme quadratique q et on a la relation suivante :

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$$

Remarque 2.1. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, q une forme quadratique sur E et f la forme polaire associée à q .

1. Soit β une base de E et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de f par rapport à β . Alors A s'appelle aussi la matrice de q par rapport à β et on a

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j$$

2. Pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial q}{\partial x_j}(x) y_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial q}{\partial y_i}(y) x_i$$

3. Puisque f est symétrique, alors f possède au moins une base orthogonale β , appelé aussi **base q -orthogonale**. Dans ce cas, q s'écrit, par rapport à cette base, sous la forme réduite suivante :

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2$$

Théorème 2.3 (Réduction d'une forme quadratique). Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et q une forme quadratique sur E de rang r . Alors il existe des formes linéaires $l_1, l_2, \dots, l_r$, linéairement indépendantes et il existe des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, non nuls, tels que

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i l_i(x)^2$$

2.2 Méthode de Gauss de réduction d'une forme quadratique

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $q : E \rightarrow K$ une forme quadratique non nulle. Alors on sait que pour tout $x \in E$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}x_i x_j$$

Nous allons appliquer la méthode de Gauss pour décomposer q sous forme de carrés.

Exemple 2.1. Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x, y, z) = x^2 + 6y^2 + 16z^2 - 4xy + 6xz - 16yz$$

Déterminons une base q -orthogonale. Pour cela, décomposons q sous forme de carrés. On a

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= x^2 - 4xy + 6xz + 6y^2 + 16z^2 - 16yz \\ &= (x - 2y + 3z)^2 - 4y^2 + 12yz - 9z^2 + 6y^2 + 16z^2 - 16yz \\ &= (x - 2y + 3z)^2 + 2y^2 + 7z^2 - 4yz \\ &= (x - 2y + 3z)^2 + 2(y - z)^2 + 5z^2 \end{aligned}$$

Donc pour déterminer une base q -orthogonale, on pose

$$\begin{cases} X = x - 2y + 3z \\ Y = y - z \\ Z = z \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} x = X + 2Y - Z \\ y = Y + Z \\ z = Z \end{cases}$$

Donc une base q -orthogonale (v_1, v_2, v_3) est déterminée par sa matrice de passage P de la base (e_1, e_2, e_3) à la base (v_1, v_2, v_3) :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc, on aura

$$\begin{cases} v_1 = e_1 \\ v_2 = 2e_1 + e_2 \\ v_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

3 Signature d'une forme bilinéaire symétrique

3.1 Bases orthonormales

Définition 3.1. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et f une forme bilinéaire symétrique sur E . Une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une **base orthonormale** de E , si

$$f(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Proposition 3.2. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$. Alors toute forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E , possède au moins une base orthonormale.

3.2 Théorème d'inertie de Sylvester

Théorème 3.3 (Théorème d'inertie de Sylvester). Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme bilinéaire symétrique sur E de rang r et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthogonale de E . Soit p le nombre des $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tels que $f(e_i, e_i) > 0$ et soit q le nombre des $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tels que $f(e_i, e_i) < 0$. Alors le couple (p, q) ne dépend pas de la base orthogonale choisie et on a $p + q = r$.

Dans ce cas, (p, q) s'appelle la **signature** de f .

Remarque 3.1. La signature d'une forme quadratique q est égale à celle de sa forme polaire associée. En pratique pour déterminer la signature d'une forme quadratique q on applique la méthode de Gauss pour décomposer q sous forme d'une somme de carrés. Donc si on obtient $q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i l_i(x)^2$, où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont non nuls, alors q est de rang r et de signature (a, β) , où a est le nombre des i , tel que $\lambda_i > 0$ et β le nombre des i , tel que $\lambda_i < 0$.

Exemple 3.1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad q(x, y, z) = ax^2 - 3y^2 - z^2 - 2xy + 4xz + 4yz$$

On se propose de déterminer, suivant les valeurs de a , le rang et la signature de q . Pour cela, nous appliquons la méthode de Gauss à la forme quadratique q .

Le paramètre a est quelconque, donc il peut être nul, par contre les coefficients de y^2 et z^2 ne sont pas nuls. On choisit par exemple z^2 , alors on a

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= -z^2 + 4xz + 4yz + ax^2 - 3y^2 - 2xy \\ &= -(2x + 2y - z)^2 + (a + 4)x^2 + y^2 + 6xy \\ &= (a - 5)x^2 + (y + 3x)^2 - (2x + 2y - z)^2 \end{aligned}$$

On est donc amené à discuter les cas suivants :

- Si $a < 5$, alors $\text{sign}(q) = (1, 2)$ et $\text{rg}(q) = 3$.
- Si $a = 5$, alors $\text{sign}(q) = (1, 1)$ et $\text{rg}(q) = 2$.
- Si $a > 5$, alors $\text{sign}(q) = (2, 1)$ et $\text{rg}(q) = 3$.