

Chapitre 3: Formes Linéaires - Dualité

1 Formes linéaires et hyperplans

Définition 1.1. Soit E un K -espace vectoriel. Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E vers K .

Remarque 1.1. Rappelons que si E est un K -espace vectoriel, on dit que H est un **hyperplan** de E , si $\dim(E/H) = 1$. Donc si E est de dimension finie, alors

$$H \text{ est un hyperplan de } E \iff \dim(H) = \dim(E) - 1$$

Proposition 1.2. Soit E un K -espace vectoriel. Alors

1. Le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E est un hyperplan de E .
2. Tout hyperplan de E est le noyau d'au moins une forme linéaire non nulle de E .
3. Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles de E . Alors

$$\ker(\varphi) = \ker(\psi) \iff \exists \lambda \in K : \psi = \lambda\varphi$$

Proof. 1. Soit φ une forme linéaire non nulle sur E , alors on sait que $E/\ker(\varphi)$ est isomorphe à $\text{Im}(\varphi)$. Puisque $\varphi \neq 0$, alors $\text{Im}(\varphi) \neq \{0_K\}$, donc $\text{Im}(\varphi) = K$. Par suite, $E/\ker(\varphi)$ est isomorphe à K , donc $\dim(E/\ker(\varphi)) = 1$. Ainsi, $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E .

2. ($\Rightarrow$) Supposons que $\ker(\varphi) = \ker(\psi)$ et soit $x_0 \in E$, tel que $x_0 \notin \ker(\varphi)$, alors on aura $E = \ker(\varphi) \oplus \text{Vect}(x_0)$. Soit $x \in E$ avec $x = y_0 + \alpha x_0$, alors $\varphi(x) = \alpha\varphi(x_0)$ et $\psi(x) = \alpha\psi(x_0)$. Comme $\varphi(x_0) \neq 0$, alors on a $\psi(x) = \frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\varphi(x)$ et ceci pour tout $x \in E$, donc on aura

$$\psi = \frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}\varphi$$

($\Leftarrow$) Trivial.

□

Proposition 1.3. Soient E un K -espace vectoriel quelconque, φ et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ des formes linéaires non nulles sur E . Alors

$$\bigcap_{i=1}^n \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi) \iff \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n \text{ tel que } \varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi_i$$

2 Espace vectoriel dual

Définition 2.1. Soit E un K -espace vectoriel. On appelle **espace vectoriel dual** de E , qu'on note E^* , l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires sur E .

On a alors $E^* = \mathcal{L}(E, K)$.

Pour $x \in E$ et pour $\varphi \in E^*$, on pose $\varphi(x) = \langle x, \varphi \rangle$.

Remarque 2.1. Si E est de dimension finie, alors on sait que $\mathcal{L}(E, K)$ est de dimension finie et on a

$$\dim(\mathcal{L}(E, K)) = \dim(E) \times \dim(K) = \dim(E)$$

Donc si E est de dimension finie, alors E^* est de dimension finie et on a

$$\dim(E^*) = \dim(E)$$

Donc, en particulier, si E est de dimension finie, alors E et E^* sont isomorphes.

Exemple 2.1. 1. Soit K un corps commutatif, pour tout $a \in K^n$ avec $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, soit φ_a l'application définie par,

$$\forall x \in K^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \implies \varphi_a(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

Alors φ_a est une forme linéaire sur K^n .

Réciproquement, soit φ une forme linéaire sur K^n , alors il existe un unique $a \in K^n$, tel que $\varphi = \varphi_a$.

2. Soit K un corps commutatif, pour chaque $x = (x_n)_{n \geq 0}$ élément de $K^{\mathbb{N}}$, soit φ_x l'application définie sur $K[X]$ par,

$$\forall P \in K[X], \quad P = \sum_{i=0}^p a_i X^i \implies \varphi_x(P) = \sum_{i=0}^p a_i x_i$$

Alors pour tout $x \in K^{\mathbb{N}}$, φ_x définit une forme linéaire sur $K[X]$.

Réciproquement, soit φ une forme linéaire sur $K[X]$, alors il existe un unique $x = (x_n)_{n \geq 0}$ élément de $K^{\mathbb{N}}$, tel que $\varphi = \varphi_x$.

3 Base duale

Proposition 3.1. Soient E un K -espace vectoriel de dimension $= n$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base quelconque de E . Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on définit $e_i^* \in E^*$, par

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \langle e_j, e_i^* \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Alors $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* , appelée **base duale** de E .

Proof. On a $\dim(E^*) = n$, donc il suffit de montrer que $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ est libre.

Pour cela, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$, tel que $\alpha_1 e_1^* + \alpha_2 e_2^* + \dots + \alpha_n e_n^* = 0$. Montrons que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* = 0 &\implies \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \langle e_j, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^* \rangle = 0 \\ &\implies \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle e_j, e_i^* \rangle = 0 \\ &\implies \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \alpha_j = 0 \quad (\text{car } \langle e_j, e_i^* \rangle = \delta_{ij}) \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale, alors

1.

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i^* \rangle e_i$$

2.

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \varphi = \sum_{i=1}^n \langle e_i, \varphi \rangle e_i^*$$

Proposition 3.3. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. Soit u un endomorphisme de E et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de u par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, alors

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, \quad a_{ij} = \langle u(e_j), e_i^* \rangle$$

4 Base préduale

Lemme 4.1. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ deux bases de E , $\beta^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*)$ et $\gamma^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*)$ leurs bases duales.

Soit P la matrice de passage de β à γ et Q celle de β^* à γ^* . Alors on a

$$Q = {}^t(P^{-1}) = ({}^tP)^{-1}$$

Théorème 4.2. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ une base de E^* et Q la matrice de passage de la base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ à la base duale β^* . Alors

1. Il existe une base unique $\gamma = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de E , appelée **base préduale** de $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, telle que $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $v_j^* = \varphi_j$.
2. Si P est la matrice de passage de la base β à la base γ , alors $P = ({}^tQ)^{-1} = {}^t(Q^{-1})$.

5 Prolongement des formes linéaires

Théorème 5.1. Soient E un K -espace vectoriel quelconque et F un sous-espace vectoriel de E . Alors toute forme linéaire sur F se prolonge en une forme linéaire de E .

Proof. Soit ψ une forme linéaire sur F et soit G un supplémentaire de F dans E . Soit φ la forme linéaire définie sur E , par

$$\begin{aligned}\varphi : E = F \oplus G &\rightarrow K \\ x = x_1 + x_2 &\mapsto \varphi(x) = \psi(x_1)\end{aligned}$$

Alors φ est un prolongement de ψ à E . □

Corollaire 5.2. Soit E un K -espace vectoriel quelconque. Alors pour tout $x \in E$, avec $x \neq 0$, il existe une forme linéaire $\varphi \in E^*$, tel que $\langle x, \varphi \rangle = 1$.

6 Orthogonalité

Définition 6.1. Soit E un K -espace vectoriel.

1. Pour toute partie non vide A de E , l'**orthogonal** de A , qu'on note $A^\perp$, est la partie de E^* définie par

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \varphi \in A^\perp \iff \forall x \in A, \quad \langle x, \varphi \rangle = 0$$

2. Pour toute partie non vide B de E , le **pré-orthogonal** de B , qu'on note B° , est la partie de E définie par

$$\forall x \in E, \quad x \in B^\circ \iff \forall \varphi \in B, \quad \langle x, \varphi \rangle = 0$$

Proposition 6.2. Soit E un K -espace vectoriel. Alors

1. Pour toute partie A de E et pour toute partie B de E , on a

$$A \subseteq B \implies B^\perp \subseteq A^\perp$$

2. Pour toute partie A de E , $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E^* .
3. Pour toute partie A de E , $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$.
4. Pour toute partie B de E^* , B° est un sous-espace vectoriel de E .
5. Pour toute partie B de E^* , $B^\circ = (\text{Vect}(B))^\circ$.
6. $E^\perp = \{0_{E^*}\}$ et $(E^*)^\circ = \{0_E\}$.

Proposition 6.3. Soient E un K -espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E . Alors

1. F^* est canoniquement isomorphe à $E^*/F^\perp$.
2. $(E/F)^*$ est canoniquement isomorphe à $F^\perp$.

Corollaire 6.4. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Alors pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$$

Lemme 6.5. Soient E un K -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $x \in E$ avec $x \notin F$. Alors, il existe une forme linéaire φ sur E , telle que

$$\langle x, \varphi \rangle = 1 \text{ et } \forall y \in F, \langle y, \varphi \rangle = 0$$

Théorème 6.6. Soient E un K -espace vectoriel. Alors,

1. Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a $(F^\perp)^\circ = F$
2. Si E est de dimension finie, alors pour tout sous-espace vectoriel G de E^* , on a $(G^\circ)^\perp = G$

Corollaire 6.7. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de codimension p , $p = \dim(E) - \dim(F)$, alors il existe p formes linéaires, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$, linéairement indépendantes, telles que

$$F = \bigcap_{i=1}^p \ker(\varphi_i)$$

Remarque 6.1. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E , F un sous-espace vectoriel de E de codimension p et $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ les formes linéaires linéairement indépendantes, telles que $F = \bigcap_{i=1}^p \ker(\varphi_i)$. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ et chaque $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose $a_{ij} = \varphi_i(e_j)$, alors

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{j=1}^n x_j e_j \implies \varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

Donc $x \in F$, si et seulement si, les composantes $x_1, x_2, \dots, x_n$ de x dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, vérifient le système (S) suivant, de p équations à n inconnues,

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

Ce système qui est de rang p , car $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ est libre, s'appelle une **représentation cartésienne** du sous-espace vectoriel F .

7 Bidual

Définition 7.1. Soit E un K -espace vectoriel, on appelle **bidual** de E , qu'on note E^{**} , le dual de E^* .

$$E^{**} = (E^*)^* = \mathcal{L}(E^*, K)$$

Remarque 7.1. Considérons l'application $j : E \rightarrow E^{**}$ définie par,

$$\forall x \in E, \forall \varphi \in E^*, \langle \varphi, j(x) \rangle = \langle x, \varphi \rangle$$

Alors, il est facile de voir que j est linéaire injective. Donc E s'identifie canoniquement à un sous-espace vectoriel de E^{**} .

En particulier, si E est de dimension finie, alors j est un isomorphisme, donc, dans ce cas, E s'identifie canoniquement à E^{**} .

Proposition 7.2. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $j : E \rightarrow E^{**}$ l'isomorphisme canonique entre E et E^{**} . Alors

1. Pour toute base β de E , on a $j(\beta) = \beta^{**}$, où $\beta^{**} = (\beta^*)^*$ est la base duale de β^* dans E^{**} .
2. Si γ est une base de E^* , γ^* sa base duale dans E^{**} et β est sa base préduale dans E , alors

$$\beta = j^{-1}(\gamma^*)$$

8 Transposée d'une application linéaire

Définition 8.1. Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle **application transposée** de f , qu'on note ${}^t f$, l'application linéaire de F^* dans E^* définie par,

$$\forall \varphi \in F^*, \quad {}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$$

Remarque 8.1. Par définition de l'application transposée d'une application linéaire f , on a

$$\forall x \in E, \forall \varphi \in F^*, \langle x, {}^t f(\varphi) \rangle = \langle f(x), \varphi \rangle$$

De plus, ${}^t f$ est l'unique application linéaire de F^* vers E^* vérifiant cette relation.

Proposition 8.2. Soient E, F et G trois K -espaces vectoriels. Alors

1. $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(E, F), {}^t(f + g) = {}^t f + {}^t g.$
2. $\forall \lambda \in K, \forall f \in \mathcal{L}(E, F), {}^t(\lambda f) = \lambda {}^t f.$
3. $\forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G), {}^t(g \circ f) = {}^t f \circ {}^t g.$

Théorème 8.3. Soient E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors,

1. $\ker({}^t f) = (\text{Im}(f))^\perp.$
2. $\text{Im}({}^t f) = (\ker(f))^\perp.$

Théorème 8.4. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et β^* sa base duale. Alors pour tout endomorphisme u de E , on a

$$\text{Mat}({}^t u, \beta^*) = {}^t \text{Mat}(u, \beta)$$

Proposition 8.5 (Dualité et stabilité). Soient E un K -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E . Alors,

$$F \text{ est stable par } u \iff F^\perp \text{ est stable par } {}^t u$$