

Chapitre 4: Formes Multilinéaires - Déterminants

1 Formes multilinéaires

1.1 Définitions et propriétés de base

Définition 1.1. Soient E un K -espace vectoriel et p un entier ≥ 1 . Une **forme p -linéaire** sur E est une application,

$$\begin{aligned} f : E^p &\rightarrow K \\ (x_1, x_2, \dots, x_p) &\mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{aligned}$$

telle que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, l'application $f_i : E \rightarrow K$ définie par

$$\forall x \in E, \quad f_i(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_p)$$

soit une forme linéaire sur E .

Remarque 1.1. 1. Soit f une forme p -linéaire sur E . On suppose qu'il existe $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ tel que $x_i = 0$, alors $f(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$.

2. Une forme 1-linéaire sur E est tout simplement une forme linéaire.

3. Une forme 2-linéaire sur E s'appelle une **forme bilinéaire** sur E .

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ et on note $\mathcal{F}(\mathbb{N}_p, \mathbb{N}_n)$ l'ensemble de toutes les applications de $\mathbb{N}_p$ vers $\mathbb{N}_n$.

Rappelons aussi qu'on appelle **permutation** toute bijection de $\mathbb{N}_n$ vers $\mathbb{N}_n$, que l'ensemble de toutes les permutations de $\mathbb{N}_n$ vers $\mathbb{N}_n$ se note $\mathcal{S}_n$ et que $\mathcal{S}_n$ muni de la composition des applications est un groupe, appelé **groupe symétrique**.

1.2 Règles de calcul

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E , p un entier ≥ 1 et $f : E^p \rightarrow K$ une forme p -linéaire.

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ un élément de E^p , tel que pour tout $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, on a $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$, alors on a

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_p) &= f\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1}e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2}e_{i_2}, \dots, \sum_{i_p=1}^n a_{i_p p}e_{i_p}\right) \\ &= \sum_{(i_1, i_2, \dots, i_p) \in \mathbb{N}_n^p} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_p p} f(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p}) \end{aligned}$$

1.3 Formes multilinéaires alternées

Définition 1.2. Soient E un K -espace vectoriel, p un entier ≥ 1 et $f : E^p \rightarrow K$ une forme p -linéaire sur E .

1. On dit que f est **symétrique** si pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_p$ et pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$, on a

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

2. On dit que f est **antisymétrique** si pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_p$ et pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$, on a

$$f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

3. On dit que f est **alternée** si pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$, on a

$$\forall i \in \mathbb{N}_p, \forall j \in \mathbb{N}_p, \quad [i \neq j \text{ et } x_i = x_j] \implies f(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$$

Théorème 1.3. Soient E un K -espace vectoriel, où K est un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$, et f une forme p -linéaire sur E . Alors f est antisymétrique, si et seulement si, f est alternée.

Proof. ($\Rightarrow$) Supposons que f est antisymétrique.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$, tel qu'il existe $i \in \mathbb{N}_p$ et $j \in \mathbb{N}_p$ avec $i \neq j$ et $x_i = x_j$. Montrons que $f(x_1, x_2, \dots, x_p) = 0$.

Comme $i \neq j$, alors on peut supposer que $i < j$. Soit τ la transposition qui échange i et j , rappelons que τ est la permutation de $\mathbb{N}_p$ définie par :

$$\tau(i) = j, \tau(j) = i \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}_p \setminus \{i, j\}, \tau(k) = k$$

Puisque f est antisymétrique, alors on aura,

$$\begin{aligned} f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(i)}, \dots, x_{\tau(j)}, \dots, x_{\tau(p)}) \\ = \varepsilon(\tau) f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) \end{aligned}$$

et comme τ est une transposition, alors $\varepsilon(\tau) = -1$, donc on a

$$\begin{aligned} f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(i)}, \dots, x_{\tau(j)}, \dots, x_{\tau(p)}) \\ = -f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) \end{aligned}$$

D'autre part, puisque $x_i = x_j$, alors, on aura

$$\begin{aligned} f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(i)}, \dots, x_{\tau(j)}, \dots, x_{\tau(p)}) \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Donc on constate que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p)$$

Par suite,

$$2_K f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = 0_K$$

Puisque K est de caractéristique $\neq 2$, alors $2_K \neq 0_K$, donc $f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = 0$, par suite, f est alternée.

($\Leftarrow$) Supposons que f est alternée et montrons que f est antisymétrique.

Puisque $\mathcal{S}_p$ est engendré par les transpositions, alors il suffit de montrer que pour toute transposition τ de $\mathcal{S}_p$, on a

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p, \quad f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(p)}) = -f(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

Soit $\tau = (i, j)$ une transposition de $\mathcal{S}_p$, avec $i < j$. Puisque f est alternée, alors on a

$$f(x_1, x_2, \dots, \overbrace{x_i + x_j}^i, \dots, \overbrace{x_i + x_j}^j, \dots, x_p) = 0$$

D'autre part, puisque f est p -linéaire et f alternée, alors on aura,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_p) = \\ f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) + f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p)$$

Donc f est antisymétrique. $\square$

Théorème 1.4. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\Delta : E^n \rightarrow K$ l'application définie pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de E^n , par

$$\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

où pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. Alors on a

1. Pour tout entier $p > n$, $\mathcal{A}_p(E) = \{0\}$.
2. $\mathcal{A}_n(E)$ est de dimension 1 et on a

$$\forall f \in \mathcal{A}_n(E), f = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \Delta$$

2 Déterminants

2.1 Déterminant d'un système de vecteurs

Définition 2.1. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, tel que,

$$\forall j \in \mathbb{N}_n, \quad x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$$

On définit le **déterminant** de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ par rapport à la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, par :

$$\det_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Remarque 2.1. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Alors

1.

$$\det_{\beta} : E^n \rightarrow K$$

est une forme n -linéaire alternée sur E .

2. Si f est une forme n -linéaire alternée quelconque, alors pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$, on a

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(e_1, e_2, \dots, e_n) \det_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Théorème 2.2. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un système de n vecteurs. Alors $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une base de E , si et seulement si, il existe une base β de E , telle que $\det_{\beta}(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$.

2.2 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 2.3. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et u un endomorphisme quelconque de E , alors la quantité

$$\det_{\beta}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

ne dépend pas de la base β choisie.

Définition 2.4. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base quelconque de E et u un endomorphisme de E . On définit le **déterminant** de u , par :

$$\det(u) = \det_{\beta}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$$

Théorème 2.5. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Alors

1. $\det(\text{Id}_E) = 1$.
2. $\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall v \in \mathcal{L}(E), \det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$.
3. $u \in \mathcal{L}(E)$ est inversible, si et seulement si, $\det(u) \neq 0$.
4. Si u est un endomorphisme inversible, alors on a

$$\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}$$

2.3 Déterminant d'une matrice

Définition 2.6. Soient K un corps commutatif et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K . On définit le **déterminant** de A , par :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

- Remarque 2.2** (Règles de calcul). 1. Si l'on effectue une permutation σ sur les colonnes de la matrice A , alors $\det(A)$ est remplacé par $\varepsilon(\sigma) \det(A)$.
2. Le déterminant ne change pas de valeur, si l'on ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire quelconque des autres colonnes de A .
3. Pour tout $\lambda \in K$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
4. Si les vecteurs colonnes de A forment un système lié, alors on a $\det(A) = 0$.

Théorème 2.7. Soient K un corps commutatif, A et B deux matrices carrées d'ordre n à coefficients dans K et I_n la matrice identité. Alors

1. $\det(I_n) = 1$.
2. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
3. A est inversible, si et seulement si, $\det(A) \neq 0$.

Proposition 2.8. Pour toute matrice carrée A , on a $\det(A) = \det({}^t A)$.

2.4 Développement d'un déterminant

Définition 2.9. Soient K un corps commutatif et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K . On appelle **mineur** relativement au coefficient a_{ij} , qu'on note Δ_{ij} , le déterminant de la matrice d'ordre $n-1$ obtenue en supprimant dans la matrice A la i -ème ligne et la j -ème colonne.

Théorème 2.10 (Développement suivant une colonne). Soient K un corps commutatif et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K . Alors pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$$

Lemme 2.11. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice triangulaire, alors on a

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Lemme 2.12. Soient K un corps commutatif et M une matrice carrée d'ordre $n+p$ à coefficients dans K , avec $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$, où A est une matrice carrée d'ordre n et B une matrice carrée d'ordre p . Alors on a

$$\det(M) = \det(A) \det(B)$$

2.5 Inverse d'une matrice

Définition 2.13. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée d'ordre n et soit Δ_{ij} le mineur associé à a_{ij} , pour chaque $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Alors

1. $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$ s'appelle le **cofacteur** de a_{ij} .
2. La matrice dont les coefficients sont les cofacteurs des a_{ij} s'appelle la **comatrice** de A et se note $\text{com}(A)$, donc on a $\text{com}(A) = ((-1)^{i+j}\Delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.
3. La matrice transposée de $\text{com}(A)$, ${}^t\text{com}(A)$, s'appelle la **matrice adjointe** de A et se note $\tilde{A}$.

Théorème 2.14. Soient K un corps commutatif, A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K et $\tilde{A}$ la matrice adjointe de A . Alors

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A)I_n$$

où I_n est la matrice identité d'ordre n .

2.6 Déterminant de Vandermonde

Proposition 2.15. Soient K un corps commutatif, n un entier, avec $n \geq 2$, et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des éléments de K deux à deux distincts. On appelle **déterminant de Vandermonde** associé à $a_1, a_2, \dots, a_n$, l'élément de K défini par :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Alors $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

Proof. Établissons d'abord une relation de récurrence entre $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et $V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, où $n > 2$. Pour cela, on considère le polynôme $P(X)$ défini par

$$P(X) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-2} & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \dots & X^{n-2} & X^{n-1} \end{vmatrix}$$

Alors pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, on a $P(a_k) = 0$, car $P(a_k)$ est un déterminant qui contient deux lignes identiques. En développant par rapport à la dernière ligne, on voit que $\deg(P) \leq n-1$ et comme P admet $n-1$ racines deux à deux distinctes, alors il existe $\alpha \in K$, tel que $P(X) = \alpha \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$. Or, α est le coefficient de X^{n-1} , donc en développant par rapport à la dernière ligne, on aura

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix} = V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

Par suite, pour tout $n \geq 2$, on a

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

Montrons maintenant par récurrence que pour tout $n \geq 2$, on a

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Pour $n = 2$, on a $V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = (a_2 - a_1)$.

Donc la propriété est vérifiée pour $n = 2$.

H.R : ŕ Supposons que $n > 2$ et que la propriété est vérifiée pour tout entier $m < n$.

D'après ce qui précède, on a $V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ et d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i)$$

par suite, on a

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} (a_n - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

□