

Chapitre 10: Formes Sesquilinéaires - Formes Quadratiques Hermitiennes

1 Formes sesquilinéaires - Formes hermitiennes

1.1 Quelques rappels sur les nombres complexes

Rappelons que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, tel que $z = a + ib$, où i est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

Dans ce cas, le conjugué, la partie réelle, la partie imaginaire et le module de z sont respectivement définis par :

$$\bar{z} = a - ib, \quad \operatorname{Re}(z) = a, \quad \operatorname{Im}(z) = b \quad \text{et} \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Rappelons aussi que si $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors on a les identités remarquables suivantes :

1. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$.
2. $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
3. $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$ et $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$.
4. $|z|^2 = z\bar{z}$.
5. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$.
6. $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$.
7. $\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = \frac{1}{4}|z_1 + z_2|^2 - \frac{1}{4}|z_1 - z_2|^2$.

1.2 Définition et propriétés de base

Définition 1.1. Soient E et F deux $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels, on dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **semi-linéaire**, si

1. $\forall x \in E, \forall y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$,
2. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in E, f(\alpha x) = \bar{\alpha}f(x)$.

Définition 1.2. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $f : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ une application.

1. On dit que f est une **forme sesquilinéaire** sur E , si

- (a) Pour tout $x \in E$, l'application $\varphi_x : E \rightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $y \in E$, par $\varphi_x(y) = f(x, y)$ est linéaire.

- (b) Pour tout $y \in E$, l'application $\psi_y : E \rightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $x \in E$, par $\psi_y(x) = f(x, y)$ est semi-linéaire.

2. Une forme sesquilinéaire est dite **hermitienne**, si

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x, y) = \overline{f(y, x)}$$

Remarque 1.1. $f : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire, si, et seulement si,

1. $\forall x \in E, \forall y_1 \in E, \forall y_2 \in E, \quad f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2),$
2. $\forall y \in E, \forall x_1 \in E, \forall x_2 \in E, \quad f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y),$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall \beta \in \mathbb{C}, \forall x \in E, \forall y \in E, \quad f(\alpha x, \beta y) = \alpha \bar{\beta} f(x, y).$

1.3 Matrice d'une forme sesquilinéaire

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E et $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E . Alors pour chaque $(x, y) \in E \times E$, avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, on a

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \overline{y_j} f(e_i, e_j)$$

Définition 1.3. La matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, définie pour tout $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, par $a_{ij} = f(e_i, e_j)$, s'appelle la **matrice de f** par rapport à la base β .

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, avec $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, on pose

$$A^* = {}^t \overline{A}$$

et on dit que A^* est la **matrice adjointe** de A .

Remarque 1.2. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E , $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de f par rapport à la base β . Alors

1. Pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i \overline{y_j}$$

2. f est hermitienne $\iff A^* = A$.

1.4 Écriture matricielle

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E , $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de f par rapport à la base β . Pour chaque $x \in E$ avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on pose

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Alors, f possède une expression matricielle sous la forme :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad f(x, y) = {}^t X A \overline{Y}$$

1.5 Changement de base

Proposition 1.4. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E . Soient β et γ deux bases de E , A et B sont, respectivement, les matrices de f par rapport aux bases β et γ et P la matrice de passage de β à γ . Alors on a

$$B = {}^t P A \overline{P}$$

1.6 Rang d'une forme sesquilinéaire

Définition 1.5. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, f une forme sesquilinéaire sur E et A la matrice de f par rapport à n'importe quelle base de E . Alors le **rang** de f est défini par

$$\text{rang}(f) = \text{rang}(A)$$

1.7 Formes hermitienne non dégénérée

Définition 1.6. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel quelconque et h une forme hermitienne sur E . On considère l'application $\Phi : E \rightarrow E^*$ qui à $x \in E$ fait correspondre φ_x , où pour tout $y \in E$, on a $\varphi_x(y) = h(x, y)$.

Si Φ est injective, on dit que h est **non dégénérée**.

Proposition 1.7. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, β une base de E , h une forme hermitienne sur E et A la matrice de h par rapport à la base β . Alors,

$$h \text{ est non dégénérée} \iff \det(A) \neq 0$$

1.8 Orthogonalité

Définition 1.8. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel quelconque, h une forme hermitienne sur E . Soit A une partie non vide de E , on définit l'**orthogonale** de A , par rapport à la forme hermitienne h , notée $A^\perp$, par :

$$\forall y \in E, \quad y \in A^\perp \iff \forall x \in A, \quad h(x, y) = 0$$

Proposition 1.9. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et h une forme hermitienne sur E , alors pour tout sous-espace vectoriel F de E , on a

1. $\dim(F) + \dim(F^\perp) \geq \dim(E)$.
2. Si de plus h est non dégénérée, alors on a

$$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E) \quad \text{et} \quad F^{\perp\perp} = F$$

Théorème 1.10. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel quelconque, h une forme hermitienne sur E et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors

$$E = F \oplus F^\perp \iff F \text{ est non isotrope}$$

1.9 Bases orthogonales

Définition 1.11. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et h une forme hermitienne sur E . On dit qu'une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E est **orthogonale** pour h , si pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, avec $i \neq j$, on a $h(e_i, e_j) = 0$.

Lemme 1.12. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et h une forme hermitienne sur E . Alors

$$h \text{ est identiquement nulle} \iff \forall x \in E, h(x, x) = 0$$

Théorème 1.13. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors toute forme hermitienne h sur E , possède au moins une base orthogonale.

2 Formes quadratiques hermitiennes

2.1 Définition et propriétés élémentaires

Définition 2.1. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. On dit qu'une application $q : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une **forme quadratique hermitienne** sur E , s'il existe une forme sesquilinéaire f sur E , telle que pour tout $x \in E$, on a $q(x) = f(x, x)$.

Proposition 2.2. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et q une forme quadratique sur E . Alors il existe une forme hermitienne unique h sur E , telle que pour tout $x \in E$, $q(x) = h(x, x)$. Dans ce cas, h s'appelle la **forme polaire** associée à la forme quadratique q et on a la relation suivante, appelée **formule de polarisation** :

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad h(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 i^k q(x + i^k y)$$

Remarque 2.1. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$, q une forme quadratique sur E et h la forme polaire associée à q .

1. Soit β une base de E et soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de h par rapport à la base β . Alors A s'appelle aussi la matrice de q par rapport à β et pour tout $x \in E$, on a

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} |x_i|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} x_i \overline{x_j} + \overline{a_{ij}} x_j \overline{x_i})$$

2. Puisque h est hermitienne, alors h possède au moins une base orthogonale β , appelé aussi **base q -orthogonale** et q s'écrit, par rapport à cette base, sous la forme réduite suivante :

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} |x_i|^2$$

Théorème 2.3. Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et q une forme quadratique sur E de rang r . Alors il existe des formes linéaires complexes $l_1, l_2, \dots, l_r$, linéairement indépendantes et il existe des scalaires réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, non nuls, tels que

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i |l_i(x)|^2$$

2.2 Méthode de Gauss pour la réduction d'une forme quadratique hermitienne

Exemple 2.1. Appliquons l'algorithme de Gauss à la forme quadratique q définie pour tout $x \in \mathbb{C}^3$ par

$$q(x) = |x_1|^2 + 2|x_2|^2 - 4|x_3|^2 + x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2 + x_1\overline{x_3} + \overline{x_1}x_3$$

Alors, nous obtenons,

$$\begin{aligned} q(x) &= |x_1|^2 + 2\operatorname{Re}(x_1(\overline{x_2} + \overline{x_3})) + 2|x_2|^2 - 4|x_3|^2 \\ &= |x_1 + x_2 + x_3|^2 + |x_2|^2 - 5|x_3|^2 - 2\operatorname{Re}(x_2\overline{x_3}) \\ &= |x_1 + x_2 + x_3|^2 + |x_2 - x_3|^2 - 6|x_3|^2 \end{aligned}$$

Exemple 2.2. Appliquons l'algorithme de Gauss à la forme quadratique q définie pour tout $x \in \mathbb{C}^3$ par

$$q(x) = x_1\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2 - ix_1\overline{x_3} + i\overline{x_1}x_3 + (1-i)x_2\overline{x_3} + (1+i)\overline{x_2}x_3$$

Alors, nous obtenons,

$$\begin{aligned} q(x) &= 2\operatorname{Re}(x_1\overline{x_2} - ix_1\overline{x_3} + (1-i)x_2\overline{x_3}) \\ &= 2\operatorname{Re}((x_1 + (1+i)x_3)(\overline{x_2} + i\overline{x_3}) + i(1+i)|x_3|^2) \\ &= 2\operatorname{Re}((x_1 + (1-i)x_3)(\overline{x_2} + i\overline{x_3})) - 2|x_3|^2 \\ &= \frac{1}{2}|x_1 + x_2 + (1-2i)x_3|^2 - \frac{1}{2}|x_1 - x_2 + x_3|^2 - 2|x_3|^2 \end{aligned}$$

Exemple 2.3. Appliquons l'algorithme de Gauss à la forme quadratique q définie pour tout $x \in \mathbb{C}^3$ par

$$q(x) = |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + ix_1\overline{x_2} - i\overline{x_1}x_2 + 2ix_2\overline{x_3} - 2i\overline{x_2}x_3$$

Alors, nous obtenons,

$$\begin{aligned} q(x) &= |x_1|^2 + 3|x_2|^2 + 6|x_3|^2 + 2\operatorname{Re}(ix_1\overline{x_2}) + 2\operatorname{Re}(2ix_2\overline{x_3}) \\ &= |x_1 + ix_2|^2 + 3|x_2 + ix_3|^2 + 3|x_3|^2 \end{aligned}$$