

Chapitre 5: Réduction des Endomorphismes

1 Polynômes et endomorphismes

1.1 Notations et définitions

Soit E un K -espace vectoriel. Pour tout endomorphisme u de E et pour tout entier $m > 0$, on définit u^m par récurrence de la manière suivante :

1. Pour $m = 0$, on pose $u^0 = \text{Id}_E$.
2. Pour $m \geq 1$, $u^m = u \circ u^{m-1} = u^{m-1} \circ u$.

Soit maintenant P un polynôme de $K[X]$, avec $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$. On définit l'endomorphisme $P(u)$, appelé **polynôme en u** , par :

$$P(u) = a_0 \text{Id}_E + a_1u + \dots + a_nu^n = \sum_{i=0}^n a_iu^i$$

Proposition 1.1. 1. Si $P = 1$ alors $P(u) = \text{Id}_E$.

$$2. \forall P \in K[X], \forall Q \in K[X], (P + Q)(u) = P(u) + Q(u).$$

$$3. \forall P \in K[X], \forall Q \in K[X], (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

Remarque 1.1. Soient E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

1. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et pour tout $P \in K[X]$, avec $P = a_0 + a_1X + \dots + a_mX^m$, la matrice $P(A)$ est définie par :

$$P(A) = a_0I + a_1A + \dots + a_mA^m = \sum_{i=0}^m a_iA^i$$

$$2. \forall P \in K[X], \forall Q \in K[X], P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u).$$

3. On suppose que E est de dimension finie $= n$. Soit $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et soit $A = \text{Mat}(u, \beta)$, alors

$$\forall P \in K[X], \text{Mat}(P(u), \beta) = P(A)$$

1.2 Polynôme minimal

Théorème 1.2. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, avec $n \geq 1$. Alors pour tout endomorphisme u de E , il existe un unique polynôme $P \in K[X]$, non constant et unitaire, tel que

1. $P(u) = 0$.
2. Si Q est un autre polynôme de $K[X]$, vérifiant $Q(u) = 0$, alors P divise Q .

Dans ce cas, P s'appelle le **polynôme minimal** de u et se note M_u .

Remarque 1.2. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Le polynôme minimal M_u de u est caractérisé par :

$$\begin{cases} M_u(u) = 0 \\ \text{Si } Q \text{ est un autre polynôme de } K[X] \text{ vérifiant } Q(u) = 0, \text{ alors } M_u \text{ divise } Q \end{cases}$$

2. $\forall u \in \mathcal{L}(E), \deg(M_u) \geq 1$.

Exemple 1.1. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Si $u = 0$ alors $M_u = X$.
2. Si $u = \text{Id}_E$ alors $M_u = X - 1$.
3. Si u est un projecteur, avec $u \neq 0$ et $u \neq \text{Id}_E$, alors $M_u = X^2 - X$.

Proposition 1.3. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et P un polynôme non constant de $K[X]$, alors

1. $P(u)$ est inversible, si et seulement si, P et M_u sont premiers entre eux.
2. Dans le cas où $P(u)$ est inversible, $P(u)^{-1}$ est un polynôme en u .

1.3 Polynôme caractéristique

Définition 1.4. $\det(XI - A)$ s'appelle le **polynôme caractéristique** de A et se note χ_A .

Proposition 1.5. Soit K un corps commutatif. Alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, le polynôme caractéristique χ_A de A est un polynôme unitaire de degré n .

Proposition 1.6. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Définition 1.7. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$, $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E , u un endomorphisme de E et A la matrice de u par rapport à la base β . Alors le **polynôme caractéristique** de u , noté χ_u est défini par

$$\chi_u = \det(XI - A) = \chi_A$$

Remarque 1.3. 1. La définition précédente a un sens, car si B est la matrice de u par rapport à une autre base de E , alors on sait que A et B sont semblables, donc d'après la proposition précédente, A et B ont même polynôme caractéristique.

2. Si $\dim(E) = n$, alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, $\deg(\chi_u) = n$.
3. Le polynôme minimal d'un endomorphisme est loin d'être son polynôme caractéristique.

1.4 Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème 1.8 (Théorème de Cayley-Hamilton). Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme quelconque de E . Alors M_u divise χ_u .

1.5 Théorème de décomposition des noyaux

Théorème 1.9. Soient E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe deux polynômes P_1 et P_2 , tels que

1. P_1 et P_2 sont premiers entre eux, $(P_1 \wedge P_2 = 1)$.
2. $(P_1 P_2)(u) = 0$.

Alors $E = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u))$.

Corollaire 1.10. Soient E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On suppose qu'il existe des polynômes $P_1, P_2, \dots, P_m$ de $K[X]$, ($m \geq 2$), tels que

1. Les polynômes $P_1, P_2, \dots, P_m$ sont deux à deux premiers entre eux.
2. $(P_1 P_2 \cdots P_m)(u) = 0$.

Alors

$$E = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u)) \oplus \cdots \oplus \ker(P_m(u)) = \bigoplus_{i=1}^m \ker(P_i(u))$$

2 Diagonalisation

2.1 Valeurs propres - Vecteurs propres

Définition 2.1. Soient E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On dit que $\lambda \in K$ est une **valeur propre** de u , s'il existe $x \in E$, avec $x \neq 0$, tel que $u(x) = \lambda x$.

Dans ce cas, x s'appelle un **vecteur propre** associé à la valeur propre λ .

Théorème 2.2. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E , alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\lambda \in K$ est une valeur propre de u .
2. λ est une racine de M_u .
3. λ est une racine de χ_u .

2.2 Sous-espaces propres

Définition 2.3. Soit E un K -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $\lambda \in K$ une valeur propre de u . On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ , le sous-espace vectoriel de E , noté E_λ et défini par :

$$E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{Id}_E)$$

Proposition 2.4. Soient E un K -espace vectoriel, u un endomorphisme de E et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ des valeurs propres deux à deux distinctes de u , alors la somme $E_{\lambda_1} + E_{\lambda_2} + \dots + E_{\lambda_m}$ est directe.

Proposition 2.5. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et u un endomorphisme de E . On suppose que $\lambda \in K$ est une racine de χ_u de multiplicité m , alors on a $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m$.

2.3 Endomorphismes diagonalisables

Définition 2.6. Soit K un corps commutatif. On dit qu'un polynôme $P \in K[X]$ a **toutes ses racines dans K** (ou que P est **scindé sur K**), si P s'écrit sous la forme :

$$P = (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont les racines deux à deux distinctes de P dans K .

Définition 2.7. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E . On dit que u est **diagonalisable** sur K , si

1. Le polynôme caractéristique de u est scindé sur K .
2. Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale.

Théorème 2.8. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie $= n$ et u un endomorphisme de E . On suppose que χ_u est scindé sur K et soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ les racines deux à deux distinctes de χ_u dans K de multiplicités respectives $m_1, m_2, \dots, m_r$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est diagonalisable sur K .
2. M_u n'a que des racines simples sur K .
3. $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$.
4. $\forall i \in \{1, 2, \dots, r\}, \dim(E_{\lambda_i}) = m_i$.

Corollaire 2.9. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . On suppose que χ_u est scindé sur K et que χ_u n'a que des racines simples. Alors u est diagonalisable.

Corollaire 2.10. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E . On suppose que u possède n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u est diagonalisable.

2.4 Diagonalisation simultanée

Lemme 2.11. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie, u et v deux endomorphismes de E et $\lambda \in K$ une valeur propre de u . On suppose que $u \circ v = v \circ u$, alors E_λ est stable par v .

Théorème 2.12. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie et $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E deux à deux commutant, où I est un ensemble quelconque ayant au moins deux éléments. Alors il existe une base β de E , tel que pour tout $i \in I$, la matrice de u_i est une matrice diagonale.

3 Trigonalisation

Définition 3.1. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E . On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit sous la forme triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème 3.2. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E . Alors u est trigonalisable, si et seulement si, le polynôme caractéristique de u est scindé sur K .

4 Endomorphismes nilpotents

Définition 4.1. Soient E un K -espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On dit que u est **nilpotent**, s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, tel que $u^m = 0$.

Proposition 4.2. Soit u un endomorphisme nilpotent, alors il existe $q \in \mathbb{N}^*$, tel que $u^q = 0$ et $u^{q-1} \neq 0$. Dans ce cas, q s'appelle l'**indice de nilpotence** de u .

Proposition 4.3. Soient E un K -espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est nilpotent.
2. $M_u = X^q$, où q est l'indice de nilpotence de u .
3. $\chi_u = X^n$.

5 Jordanisation d'un endomorphisme nilpotent

Définition 5.1. On appelle **matrice nilpotente de Jordan**, toute matrice carrée qui s'écrit sous la forme suivante :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème 5.2. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E non nul et nilpotent d'indice q . Alors il existe une base de E , appelée **base de Jordan** de u , dans laquelle la matrice de u est une matrice nilpotente de Jordan.

6 Décomposition de Dunford

Théorème 6.1 (Projecteurs spectraux). Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur K , tel que

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont les racines deux à deux distinctes de χ_u . Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on pose $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$ et on pose $N_i = \ker(P_i(u))$. Alors

1. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, N_i est stable par u .
2. $E = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_r$.
3. Pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, $\dim(N_i) = m_i$.
4. Si pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on désigne par π_i la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$, alors π_i est un polynôme en u et on a $\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_r = \text{Id}_E$.

Théorème 6.2 (Décomposition de Dunford). Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n , avec $n \geq 1$, et u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur K . Alors il existe un unique endomorphisme diagonalisable d et un unique endomorphisme nilpotent v , tels que

1. $u = d + v$.
2. $d \circ v = v \circ d$.

De plus d et v soient des polynômes en u .

7 Réduction de Jordan

Théorème 7.1. Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur K . On suppose que

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} (X - \lambda_2)^{m_2} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sont les racines deux à deux distinctes de χ_u . Alors il existe une base de E , appelée **base de Jordan** de u , dans laquelle la matrice J de u , s'écrit sous la forme suivante :

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{pmatrix}$$

où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, on a

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{i,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{i,r_i} \end{pmatrix}$$

et où pour tout $j \in \{1, \dots, r_i\}$, on a

$$J_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Corollaire 7.2. Pour toute matrice carrée A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice de Jordan J et il existe une matrice inversible P , telles que $A = PJP^{-1}$.