

Chapitre 4 : Espaces complets

Le héros de l'histoire est un métrique (E, d) .

Complétude, suites de Cauchy

Définition et propriétés

Définition 0.1 On dit qu'une suite (u_n) est de **Cauchy** ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n \geq N, \forall p \geq N, d(u_n, u_p) < \varepsilon.$$

On écrit alors $\lim_{p,q \rightarrow +\infty} d(u_p, u_q) = 0$.

Proposition 0.1 Toute suite convergente est de Cauchy.

Remarque. $u_n = \frac{1}{n}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ mais ne converge pas donc $\mathbb{R}$ n'est pas complet.

Proposition 0.2 1. Toute suite de Cauchy est bornée.

2. Toute suite de Cauchy ayant une sous-suite convergente converge vers la limite de cette dernière.

3. Les applications uniformément continues préservent la cauchyétude.

Démonstration.

<https://keepmath.com>

1. En fixant $p = N$ dans la définition, on a $\forall q \geq N, d(u_q, u_N) < \varepsilon$ donc pour tout $q \geq N, u_q \in B(u_N, \varepsilon)$. Donc u est ultimement bornée donc bornée.
2. S'il existe φ, l tel que $u \circ \varphi$ converge vers l , il existe K tel que pour tout $n \geq K, d(u_{\varphi(n)}, l) < \varepsilon$. Il existe aussi $K' > K$ tel que pour tout $n \geq K', \varphi(n) \geq N$. On a alors pour tout $p \geq N$,

$$d(u_p, l) \leq d(u_p, u_{\varphi(K')}) + d(u_{\varphi(K')}, l) < 2\varepsilon.$$

Donc u converge vers l .

3. Soit $f : (E, d) \rightarrow (E', d')$ uniformément continue et (u_n) de Cauchy dans (E, d) . Soit $\eta > 0$, par uniforme continuité, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d(x, y) < \varepsilon \implies d'(f(x), f(y)) < \eta$. Or, pour $p, q \geq N, d(u_p, u_q) < \varepsilon$ donc $d'(f(u_p), f(u_q)) < \eta$.

Définition 0.2 On dit que d et d' sont **équivalentes** ssi $\text{Id} : (E, d) \rightarrow (E, d')$ est continue ouverte.

Applications

Proposition 0.3 Un espace vectoriel normé de dimension finie est complet.

Démonstration. Soit E l'espace vectoriel normé, $n = \dim(E)$ finie. On a vu que, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ,

$$T : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \mapsto (x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

est une bijection linéaire continue donc uniformément continue. Donc il suffit de montrer $\mathbb{R}^n$ complet. Il suffit de le montrer pour la norme infinie car les normes y sont équivalentes.

Si $(x^k)_k$ est de Cauchy, pour tout i , $(x_i^k)_k$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ qui est complet donc converge vers x_i . On a donc x^k qui converge vers $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Remarque. $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_1)$ n'est pas complet :

$$f_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{p}, 1] \\ \text{affine} & \text{si } x \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{p}, \frac{1}{2} + \frac{1}{p}] \\ 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}] \end{cases}$$

On a

$$\|f_p - f_q\|_1 = \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}^{\frac{1}{2}} |f_p(t) - f_q(t)| dt \leq \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}^{\frac{1}{2}} (f_p(t) + f_q(t)) dt = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2q} \rightarrow 0.$$

Donc $(f_n)_n$ de Cauchy mais ne converge pas. Si $(f_n)_n$ converge vers f , on a $\int_{\frac{1}{2}}^1 |f_n(t) - f(t)| dt \rightarrow 0$ donc $\int_{\frac{1}{2}}^1 |1 - f(t)| dt = 0$ et $f = 1$ presque partout sur $[\frac{1}{2}, 1]$. On a de même $f = 0$ presque partout sur $[0, \frac{1}{2}]$ donc f a une forte tendance à ne pas être continue.

Proposition 0.4 Soit X un ensemble non vide et (E, d) un espace métrique. On note $\mathcal{F}_b(X, E)$ l'ensemble des fonctions de E^X bornées et on définit la distance (habituelle) par

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Si (E, d) est complet, $(\mathcal{F}_b(X, E), d_\infty)$ l'est aussi.

Démonstration. Soit $(f_n)_n$ de Cauchy dans $(\mathcal{F}_b(X, E), d_\infty)$. Par définition de d_∞ , on a pour tout $x \in X$ et $p, q \geq N$, $d(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon$ donc $(f_p(x))_p$ est de Cauchy dans E donc converge vers $f(x)$. Avec $q \rightarrow +\infty$ dans la définition de la cauchyétude, on a pour tout x , $d(f_p(x), f(x)) \leq \varepsilon$ donc $d_\infty(f_p, f) \leq \varepsilon$ donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f .

Proposition 0.5 Soit (E, d) un complet, $F \subset E$. $(F, d|_F)$ est complet ssi F est fermé dans E .

Démonstration.

$\Rightarrow$ Soit $(f_n)_n$ une suite de F qui converge vers $f \in E$. $(f_n)_n$ est de Cauchy dans E donc dans F donc converge donc $f \in F$ et F fermé.

$\Leftarrow$ Soit $(f_n)_n$ de Cauchy dans F . Elle est de Cauchy dans E donc converge vers $f \in E$ donc, comme F fermé, $f \in F$ et $(f_n)_n$ converge dans F .

Proposition 0.6 1. $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

2. $(C_b([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

3. $(C_0([0, 1]) = \{u \in C([0, 1]), \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 1} u(x) = 0\}, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

4. Pour tout ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, $C(\Omega)$, $C_b(\Omega)$, $C_0(\Omega) = \{u \in C(\overline{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0\}$, $\ell^\infty = \{\text{suites bornées}\}$, $c_0 = \{(u_n)_n \in \ell^\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0\}$ et $c = \{\text{suites convergentes}\}$ sont complets munis de $\|\cdot\|_\infty$.

5. $\mathcal{L}_c(E, F)$ est complet pour la norme induite si F l'est.

6. En particulier, $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{R})$ est toujours complet.

Démonstration.

- Montrons le premier point. Les quatre premiers points se font de la même façon. On sait que $C([0, 1]) \subset \mathcal{F}_b([0, 1])$ donc si on montre $C([0, 1])$ fermé dans $\mathcal{F}_b([0, 1])$, on a le résultat. Or les limites uniformes de suites de fonctions continues restent continues d'où le résultat.
- On peut appliquer le résultat précédent car la norme induite est bien la norme uniforme : $\|f\| = \|f\|_{\mathcal{L}(\overline{B}_E, F)}$.

Quelques théorèmes importants

Théorème du point fixe

Théorème 0.1 (Point fixe contractant) Soit (E, d) un complet. Toute application $T : E \rightarrow E$ strictement contractante (il existe $k \in [0, 1[$, tel que pour tout $x, y \in E$, $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$) admet un unique point fixe.

Démonstration. Considérons la suite de E définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = T(u_n) \\ u_0 \in E \text{ choisi} \end{cases}$$

Montrons que cette suite converge. Pour tout n, p, q avec $p \leq q$, on a :

$$d(u_{n+1}, u_n) \leq d(T(u_n), T(u_{n-1})) \leq kd(u_n, u_{n-1}) \leq k^n d(u_1, u_0).$$

$$d(u_p, u_q) \leq \sum_{n=p}^{q-1} d(u_{n+1}, u_n) \leq \sum_{n=p}^{q-1} k^n d(u_1, u_0).$$

Donc, (u_n) est de Cauchy donc convergente. Notons l sa limite. On a alors, comme T est contractante donc continue, $l = T(l)$.

Si u et u' sont deux points fixes,

$$d(u, u') = d(T(u), T(u')) \leq kd(u, u').$$

Comme $k < 1$, $u = u'$.

Remarque.

- C'est faux si E n'est pas complet : si $E =]0, 1]$, $x \mapsto \frac{x}{2}$ n'a pas de point fixe.
- On a besoin d'une constante de Lipschitz uniforme : avec l'hypothèse $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$, ça ne marche pas. Par exemple si $E = \mathbb{R}$ et $T = x \mapsto \sqrt{1+x^2}$, on a $|T'(x)| < 1$ pour tout x donc, par le théorème des accroissements finis, $|T(x) - T(y)| < |x - y|$. Cependant, $x = \sqrt{1+x^2}$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.
- Ce théorème est l'outil essentiel pour la démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz et du théorème des fonctions implicites.

Prolongement des applications continues

Théorème 0.2 (Prolongement) Soient (E, d) et (E', d') deux métriques, $D \subset E$ dense, (E', d') complet. Si $T : D \rightarrow E'$ est uniformément continue, il existe un unique prolongement $\tilde{T}$ uniformément continue de T à E .

Remarque. Si T est aussi linéaire et E, E' des espaces vectoriels normés, alors T reste linéaire. Si de plus T est une isométrie, $\tilde{T}$ aussi.

Démonstration. Soit $x \in E$. Il existe $(x_n)_n \in D^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x . Cette suite est donc de Cauchy. Puisque T est uniformément continue, $(T(x_n))_n$ est de Cauchy donc elle converge.

- La limite ne dépend que de x . En effet, si $(x'_n)_n$ converge vers x , $d'(T(x_n), T(x'_n))$ tend vers 0 car $d(x_n, x'_n)$ tend vers 0 et T est uniformément continue. Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x'_n)$. On note $\tilde{T}(x)$ cette limite.
- On a de plus clairement $\tilde{T}|_D = T$.
- Montrons que $\tilde{T}$ est uniformément continue. Soient $x, y \in E$ avec $x = \lim x_n$ et $y = \lim y_n$.

$$d'(\tilde{T}(x), \tilde{T}(y)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d'(T(x_n), T(y_n)).$$

Or pour tout $\varepsilon > 0$, et n assez grand,

$$d'(T(x_n), T(y_n)) \leq \omega_T(d(x_n, y_n)) \leq \omega_T(d(x, y) + \varepsilon)$$

avec $\omega_T(r) = \sup\{d'(T(x), T(y)), d(x, y) \leq r\}$ le module de continuité uniforme de T . Donc $d'(\tilde{T}(x), \tilde{T}(y)) \leq \omega_T(d(x, y))$ donc $\tilde{T}$ est uniformément continue et a le même module de continuité uniforme que T .

Exemple. [Construction de l'intégrale de Riemann] On pose D l'ensemble des fonctions en escalier de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, $E' = \mathbb{R}$ et

$$T : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \sum_{i=1}^n f_i(x_{i+1} - x_i) \end{cases}$$

On a $|T(f)| \leq (b-a)\|f\|_{\infty}$ donc, comme T est linéaire elle est uniformément continue et on peut la prolonger à $E = \overline{D} = C([a, b], \mathbb{R})$.

On peut aussi étendre l'intégrale aux limites uniformes de fonctions en escalier (fonctions réglées). Ce sont les fonctions qui ont une limite à gauche et à droite en tous points.

Exemple. [Transformée de Fourier] Pour tout ξ , $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\langle \xi, x \rangle} f(x) dx$ est bien définie si $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On montre que si $f \in L^1 \cap L^2$, $\|\hat{f}\|_{L^2} \leq c\|f\|_{L^2}$. Par densité de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 , $f \mapsto \hat{f}$ se prolonge à L^2 entier mais le prolongement n'est pas donné par l'intégrale.

Complétion

Définition 0.3 On dit que (E', d') est un **complété** de (E, d) ssi (E', d') est complet et existe une isométrie $I : E \rightarrow E'$ telle que $I(E)$ soit dense dans E' .

Théorème 0.3 (Unicité du complété) Soit (E, d) un métrique. S'il existe un complété E' de E , il est unique au sens où si (E'', d'') est un autre complété, E' et E'' sont isométriques. On dit que (E', d') et (E'', d'') sont des réalisations du complété de E .

Démonstration. On a $I : E \rightarrow E'$ et $I' : E \rightarrow E''$. Considérons $I \circ I'^{-1} : I'(E) \rightarrow E'$. C'est une isométrie. Par densité de $I'(E)$ dans E'' , on peut la prolonger en une isométrie $\tilde{I}''$ de E'' dans E' . Montrons que celle-ci est surjective (on a déjà l'injectivité). $\tilde{I}''(E'')$ est dense car elle contient $I'(E)$ qui est dense. De plus, $\tilde{I}''(E'')$ est fermée (car E'' est complet donc $\tilde{I}''(E'')$ aussi) dans E' donc $\tilde{I}''(E'') = E'$ et on a la surjectivité.

Théorème 0.4 Soit (E, d) un métrique. Il admet un complété.

Démonstration. Posons $E' = \mathcal{S}(E)/\sim$ avec $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des suites de Cauchy de E et $\sim$ la relation d'équivalence :

<https://keepmath.com>

$$(x_n)_n \sim (y_n)_n \quad \text{ssi} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Posons χ la surjection canonique de $\mathcal{S}(E) \rightarrow E'$ et d' la distance sur E' définie par

$$d'(\chi((x_n)_n), \chi((y_n)_n)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, y_n).$$

Montrons que la limite existe et que cette définition est indépendante du représentant.

— On a $|d(x, x') - d(y, y')| \leq d(x, y) + d(x', y')$ donc

$$|d(x_p, y_p) - d(x_q, y_q)| \leq d(x_p, x_q) + d(y_p, y_q) \rightarrow 0.$$

Donc $(d(x_n, y_n))_n$ est de Cauchy donc la limite existe.

— Si $(x'_n)_n \sim (x_n)_n$ et $(y'_n)_n \sim (y_n)_n$,

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leq d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n) \rightarrow 0$$

donc la définition est indépendante du représentant.

— C'est de plus une distance : c'est clairement symétrique, ça vérifie l'inégalité triangulaire d'après celle de d et le troisième axiome à vérifier est vraie par définition de E' .

— (E, d) s'injecte isométriquement et densément dans (E', d') . Posons :

$$I : \begin{cases} E \rightarrow E' \\ x \mapsto \chi(x, x, x, \dots) \end{cases}$$

C'est bien une isométrie : $d'(I(x), I(y)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, y) = d(x, y)$. $I(E)$ est de plus dense : soit $\chi((x_n)_n) \in E'$, on a

$$d'(\chi((x_n)_n), I(x_p)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_p) = d_p.$$

Et on a $\lim_{p \rightarrow +\infty} d_p = 0$ car les suites sont de Cauchy.

— Il reste à montrer que (E', d') est complet, ce qui est laissé en exercice.

Remarque. Si E est un espace vectoriel normé, il admet un complété qui est lui-même un espace vectoriel normé (Banach).

Théorème de Baire

Théorème 0.5 (Baire) Soit (E, d) un complet.

- Toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.
- (Ce qui est équivalent) Toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

<https://keepmath.com>

Démonstration. On a le lemme :

Lemme 0.1 Soit $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés non vides dont le diamètre tend vers 0. $\bigcap_{n \geq 0} F_n$ est un singleton.

Démonstration. Il y a au plus un point car le diamètre tend vers 0. Soit $x_n \in F_n$. $(x_n)_n$ est de Cauchy car les diamètres tendent vers 0. Donc $(x_n)_n$ converge vers x donc $x \in \bigcap_{n \geq 0} F_n$.

Remarque. On ne peut pas supprimer l'hypothèse $\delta(F_n) \rightarrow 0$ sinon l'intersection peut même être vide.

Soit $(\Omega_n)_n$ une suite d'ouverts denses. Montrons que $\bigcap_{n \geq 0} \Omega_n$ est encore dense, ie que si ω est un ouvert non vide,

$$\omega \cap \left(\bigcap_{n \geq 0} \Omega_n \right) \neq \emptyset.$$

$\omega \cap \Omega_1 \neq \emptyset$ car Ω_1 est dense. Comme cette intersection est ouverte, il existe $x_1, r_1 > 0$ tel que $\omega \cap \Omega_1 \supset B(x_1, r_1) \subset \overline{B}(x_1, \frac{r_1}{2})$. $\omega \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 \supset B(x_1, \frac{r_1}{2}) \cap \Omega_2 \supset \overline{B}(x_2, r_2) \subset B(x_2, \frac{r_2}{2})$. Par récurrence et par densité, on construit des boules emboîtées dont l'intersection est (par le lemme précédent) un singleton. Celui-ci est inclus dans $\omega \cap (\bigcap_{n \geq 0} \Omega_n)$ qui en devient non vide.

Corollaire 0.1 Aucun espace de Banach de dimension infinie ne peut avoir de base dénombrable.

Démonstration. Supposons que $(e_n)_n$ soit une base dénombrable. L'espace $E_n = \text{Vect}\{(e_i)_{i \leq n}\}$ est un fermé (clair) et d'intérieur vide car sinon on a une contradiction avec le théorème de Baire.

Corollaire 0.2 *Il n'existe pas de norme sur $\mathbb{R}[X]$ qui le rende complet.*

Théorème de Stone-Weierstrass

Cas réel Soit X un compact et $H \subset C^0(X, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Le théorème de Stone-Weierstraß donne des conditions suffisantes sur H pour qu'il soit dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$.

Définition 0.4 Soit H une sous-algèbre de $C^0(X, \mathbb{R})$. H est dite **séparante** ssi pour tout $x \neq x' \in X$, il existe $u \in H$ tel que $u(x) \neq u(x')$.

Théorème 0.6 Soit $H \subset C^0(X, \mathbb{R})$. Si H est une sous-algèbre séparante qui contient les constantes, alors H est dense.

Corollaire 0.3 Pour $X = [0, 1]$, les fonctions polynômiales forment un sous-espace dense dans $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.

Remarque.

- Ça marche aussi pour les fonctions polynômiales en n variables.
- On en déduit que les fonctions C^∞ sont denses dans $C^0(X, \mathbb{R})$.
- L'ensemble des fonctions combinaisons linéaires de fonction de la forme $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ avec f, g continues.

Définition 0.5 Un espace vectoriel est dit **réticulé** ssi pour tout $u, v \in H$, $\sup(u, v) \in H$ et $\inf(u, v) \in H$.

Théorème 0.7 Soit $H \subset C^0(X, \mathbb{R})$ réticulé, séparant et contenant les constantes. H est dense.

Remarque. Ça montre que les fonctions lipschitziennes sont denses. En effet, la seule difficulté consiste à montrer que leur ensemble est réticulé. On peut remarquer que $\sup(u, v) = \frac{u+v+|u-v|}{2}$. Comme on a affaire à un espace vectoriel, il suffit de montrer que $|u|$ est lipschitzienne, ce qui est vrai car $||u|(x) - |u|(y)| \leq |u(x) - u(y)| \leq k_u|x - y|$.

Théorème 0.8 Le théorème 4.6 est une conséquence du théorème 4.7.

Démonstration. Soit H une sous-algèbre séparante contenant les constantes. On va montrer que H vérifie les hypothèses de théorème 4.7. H est une sous-algèbre séparante qui contient les constantes, il reste donc à montrer qu'elle est réticulée. Comme on a vu précédemment, il suffit de montrer que pour tout $u \in H$, $|u| \in H$.

Théorème 0.9 (Dini) Si $(f_n)_n$ est une suite croissante de fonctions continues qui converge simplement vers f continue, alors on a une convergence uniforme de $(f_n)_n$ vers f .

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et $F_n = \{x \in X, |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}$. Les F_n forment une suite de fermés décroissants d'intersection vide car f_n converge simplement. Comme X est compact, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, $F_n = \emptyset$. D'où la convergence uniforme.

Lemme 0.2 *La suite de polynômes définie par :*

$$P_0 = 0 \text{ et } P_{n+1} = P_n + \frac{X^2 - P_n^2}{2}$$

converge uniformément sur $[-1, 1]$ vers la fonction $x \mapsto |x|$.

Démonstration. On montre par récurrence que ce sont des polynômes et que $0 \leq P_n(r) \leq |r|$. On a de plus une convergence simple. Par Dini, on a le résultat.

Soit $(P_n)_n$ la suite de polynômes du lemme et $u \in H$. En considérant $\frac{u}{\|u\|_\infty}$, on peut supposer $\|u\|_\infty \leq 1$, on a $|u| \in H$. Donc H vérifie les hypothèses du théorème 4.7 donc $\overline{H}$ est dense donc H l'est.

Définition 0.6 *On dit que H est **fortement séparant** ssi pour tout $x \neq x' \in X$ et $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, il existe $u \in H$ tel que $u(x) = \alpha$ et $u(x') = \alpha'$.*

Lemme 0.3 *Si $\text{Card}(X) > 1$ et si $H \subset C^0(X, \mathbb{R})$ réticulé et fortement séparant, alors H est dense.*

Démonstration. Soit $f \in C^0(X, \mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ et x fixé. Pour tout $x' \in H$, il existe $u_{x'} \in H$ tel que $u_{x'}(x) = f(x)$ et $u_{x'}(x') > f(x') - \varepsilon$. On pose $O_x = \{y \in X, u_{x'}(y) > f(y) - \varepsilon\}$. C'est un ouvert qui contient x et x' . On a $X = \bigcup_{x' \neq x} O_{x'}$ mais X est compact donc $X = \bigcup_{i=1}^p O_{x'_i}$. Posons $v_x = \sup\{u_{x'_1}, \dots, u_{x'_p}\} \in H$ car H est réticulé. On a $v_x(x) = f(x)$ et $v_x(x') > f(x') - \varepsilon$ pour tout $x' \in X$.

On pose $O_x = \{x' \in X, v_x(x') < f(x') + \varepsilon\}$. C'est un ouvert qui contient x et on a $X = \bigcup_{x \in X} O_x$ donc par compacité, $X = \bigcup_{j=1}^q O_{x_j}$. Posons $v = \inf\{v_{x_1}, \dots, v_{x_q}\}$. On a alors $\|v - f\|_\infty < \varepsilon$ avec $v \in H$. Donc H est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$.

Cas complexe

Théorème 0.10 *Soit $H \subset C^0(X, \mathbb{C})$. Si H est une sous-algèbre séparante stable par conjugaison et qui contient les constantes, alors H est dense.*

Corollaire 0.4 (Stone-Weierstrass trigonométrique) *Les polynômes trigonométriques (en $e^{i\theta}$) sont denses dans les fonctions continues périodiques.*

Critères de complétude

Convergence absolue

Définition 0.7 *On dit que la série de terme général $(u_n)_n$ est **absolument convergente** ssi $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \|u_k\|$ existe.*

Proposition 0.7 *Soit E un espace vectoriel normé. E est complet ssi toute série absolument convergente converge.*

Démonstration.

$\Rightarrow$ Soit $(u_n)_n$ absolument convergente. On va montrer qu'elle est convergente via la cauchyétude des sommes partielles : si $p < q$,

$$\left\| \sum_{n=0}^q u_n - \sum_{n=0}^p u_n \right\| = \left\| \sum_{n=p+1}^q u_n \right\| \leq \sum_{n=p+1}^q \|u_n\| \rightarrow 0.$$

$\Leftarrow$ Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy. On peut en extraire une sous-suite qui converge rapidement

$$\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{2^n}$$

(C'est possible car u est de Cauchy : il suffit de mettre $\frac{1}{2^n}$ dans la définition de la cauchyétude de u). Donc la série de terme général $(u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)})_n$ est absolument convergente. Donc les sommes partielles convergent. Or icelles valent $u_{\varphi(N)} - u_{\varphi(0)}$ donc u admet une valeur d'adhérence donc elle y converge. Donc E est complet.

Exemple.

- L^1 est complet.
- Définition de $\exp$, $\sin$, $\cos$, $(I_n + \cdot)^{-1}$ dans $M_n(\mathbb{K})$:

$$e^M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$$

qui converge absolument (si on prend une norme d'algèbre, mais ce choix nous chaut peu puisqu'on est en dimension finie et que les normes sont donc équivalentes).

Proposition 0.8 Soient E et F des espaces de Banach. L'ensemble des applications linéaires inversibles à réciproque continue est un ouvert de $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Produits d'espaces complets

Théorème 0.11 Un produit dénombrable d'espaces métriques est complet pour la distance :

$$d(X, Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\min\{1, d_n(X_n, Y_n)\}}{2^n}.$$

Démonstration. On sait que la topologie associée est la topologie produit. Soit $(X^p)_p$ de Cauchy. On a $d(X^p, X^q) \rightarrow 0$ pour $p, q \rightarrow +\infty$ donc $d_n(X_n^p, X_n^q) \rightarrow 0$ donc $(X_n^p)_p$ est de Cauchy donc converge vers X_n . On a donc la convergence de $(X^p)_p$ vers $X = (X_n)_n$ pour la topologie produit, donc pour la distance ci-dessus.

Remarque. Le résultat subsiste pour des distances pour lesquelles les projections sont uniformément continues.