

Chapitre 7 : Espaces de Hilbert

Les espaces hilbertiens généralisent de façon algébrique et topologique à la dimension infinie la notion d'espace euclidien (ou hermitien dans le cas complexe). Il s'agit donc d'espaces de Banach dont la norme est associée à un produit scalaire. On peut ainsi utiliser (avec quelques précautions) l'intuition géométrique de l'espace euclidien pour travailler sur ces espaces.

Dans tout ce chapitre, nous prendrons comme corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Généralités

Nous allons définir en premier lieu l'extension purement algébrique de la notion d'espace euclidien ou hermitien à la dimension infinie, puis nous donnerons la bonne généralisation qui inclut une hypothèse topologique.

Espaces préhilbertiens

Définition 0.1 Sur un $\mathbb{R}$ - (resp. $\mathbb{C}$ -) espace vectoriel H , on appelle **produit scalaire** toute forme *i*) bilinéaire (resp. sesquilinéaire) *ii*) symétrique (resp. hermitienne) *iii*) définie *iv*) positive. On le note usuellement $(\cdot, \cdot)$ et les hypothèses ci-dessus s'écrivent précisément :

- i*) Pour tout $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$
linéarité à droite $(x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda(x, y_1) + (x, y_2)$.
(anti)linéarité à gauche $(\lambda x_1 + x_2, y) = \bar{\lambda}(x_1, y) + (x_2, y)$.
- ii*) $\forall x, y \in H, (y, x) = \overline{(x, y)}$.
- iii*) $\forall x \in H, ((x, x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$.
- iv*) $\forall x \in H, (x, x) \geq 0$.

Remarque. Les conditions i)...iv) ont été écrites ci-dessus pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ avec antilinéarité par rapport à gauche. Certains auteurs mettent l'antilinéarité à droite. C'est simplement une question de convention. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $\bar{\lambda} = \lambda$ de telle sorte que la sesquilinéarité se ramène à la bilinéarité et de même le caractère hermitien ii) se ramène à la symétrie.

Définition 0.2 On appelle **espace préhilbertien** un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$.

Proposition 0.1 (Cauchy-Schwarz) Dans un espace préhilbertien H , on a

$$\forall x, y \in H, \quad |(x, y)| \leq \|x\| \|y\|,$$

en posant $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ et $\|y\| = (y, y)^{1/2}$.

Démonstration. Soit $x, y \in H$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + 2 \operatorname{Re}(\lambda(x, y)) + |\lambda|^2 (y, y).$$

On prend $\lambda = \overline{t(x, y)}$ et cela donne

$$t^2 |(x, y)|^2 (y, y) + 2 |(x, y)|^2 t + (x, x) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Le discriminant du polynôme en t doit donc être négatif ou nul, ce qui donne $|(x, y)|^4 - (x, x)(y, y)|x, y|^2 \leq 0$ ou encore

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y).$$

Corollaire 0.1 *Sur un espace préhilbertien $(H, (\cdot, \cdot))$, la quantité $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ définit une norme, pour laquelle le produit scalaire est continu : $|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$.*

Démonstration. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in H$ on a

- $\|\lambda x\| = (\lambda x, \lambda x)^{1/2} = |\lambda|(x, x)^{1/2} = |\lambda|\|x\|$.
- $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow ((x, x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$.
- $\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) + 2\operatorname{Re}(x, y)$. En utilisant Cauchy-Schwarz, $\operatorname{Re}(x, y) \leq |(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$, on obtient $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$.

Ainsi $\|\cdot\|$ est bien une norme sur H . La continuité du produit scalaire est encore une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 0.2 (Identité du parallélogramme) *Dans un espace de Hilbert $(H, (\cdot, \cdot))$, on a*

$$\forall x, y \in H, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Remarque. Interprétation géométrique de l'identité ci-dessus pour le parallélogramme de sommets $(0, x, x + y, y)$: la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés. Une autre version appelée identité de la médiane dit que la somme des carrés des médianes des deux triangles $(0, x, y)$ et $(0, x, x + y)$ est égale à la médiane (moyenne) des carrés

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Définition 0.3 *On dit qu'une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ de H est **orthogonale** (resp. **orthonormée**) si*

$$\begin{aligned} & \forall i, j \in I, i \neq j, (x_i, x_j) = 0 \\ \text{resp. } & \forall i, j \in I, (x_i, x_j) = \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Proposition 0.3 *Si $(x_1, \dots, x_N)$ est une famille finie orthogonale on a*

$$\|x_1 + \dots + x_N\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_N\|^2.$$

Démonstration. On développe le carré scalaire

$$\|x_1 + \dots + x_N\|^2 = \sum_{i=1}^N \|x_i\|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq N} (x_i, x_j) \right) = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_N\|^2.$$

Espaces hilbertiens, Théorème de la projection

Définition 0.4 Un *espace de Hilbert* (ou *hilbertien*) est un espace préhilbertien complet.

Proposition 0.4 Un sous-espace vectoriel F d'un espace de Hilbert $(H, (\cdot, \cdot))$, muni du produit scalaire restreint à F , est un espace de Hilbert si et seulement si il est fermé dans H .

Ainsi les sous-espaces de Hilbert sont les sous-espaces vectoriels fermés.

Remarque. En dimension finie, tout espace préhilbertien est un espace de Hilbert et tout sous-espace vectoriel est fermé. Cela n'est plus vrai en dimension infinie.

Le théorème qui suit bien que très intuitif en dimension finie repose essentiellement sur la propriété de complétude. C'est le résultat fondamental associé à la structure hilbertienne. A partir de là on démontre tout le reste.

Théorème 0.1 (de la projection) Si C est un convexe fermé d'un espace de Hilbert H , on a les résultats suivants :

a) Pour tout $x \in H$, il existe un unique $x_C \in C$ tel que

$$\|x - x_C\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

On appelle x_C **projection** de x sur C et on note $x_C = P_C(x)$.

b) Le point $x_C = P_C(x)$ est caractérisé par

$$\forall y \in C, \operatorname{Re}(x - x_C, y - x_C) \leq 0.$$

c) Si C est un sous-espace vectoriel fermé de H , la caractérisation s'écrit

$$\forall y \in C, (x - x_C, y) = 0 \quad (x - x_C \text{ orthogonal à } C).$$

d) La projection P_C est une contraction $H \rightarrow C$

$$\forall x, y \in H, \|P_C(y) - P_C(x)\| \leq \|x - y\|.$$

Démonstration. a) Unicité : Si $x_C^1 \neq x_C^2$ sont des minima pour la fonction $\|x - \cdot\| \in \mathbb{R}$ définie sur C , alors comme C est convexe le milieu $\frac{x_C^1 + x_C^2}{2}$ appartient à C et on a

$$\|x_C^1 - x_C^2\|^2 = 2(\|x - x_C^1\|^2 + \|x - x_C^2\|^2) - 4\left\|x - \frac{x_C^1 + x_C^2}{2}\right\|^2 \leq 0.$$

On a nécessairement $x_C^2 = x_C^1$.

Existence : Soit $x \in H$, la fonction $C \ni y \rightarrow \|x - y\| \in \mathbb{R}$ est minorée par 0 donc admet une borne inférieure $\delta \geq 0$. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de C minimisante, i.e. telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \inf_{y \in C} \|x - y\| = \delta.$$

Pour $m, n \in \mathbb{N}$, l'identité du parallélogramme 7.1.6 donne

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\|^2 &= \|(x - y_m) - (x - y_n)\|^2 \\ &= 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \\ &\leq 2(\|x - y_n\|^2 + \|x - y_m\|^2) - 4\delta^2 \quad \text{car } \frac{y_n + y_m}{2} \in C.\end{aligned}$$

Donc pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\|y_n - y_m\| \leq \varepsilon$ pour $m, n \geq N_\varepsilon$. La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et, comme C est un fermé de H qui est complet, elle admet une limite dans C . On note $x_C = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ et on a

$$x_C \in C \quad \text{et} \quad \|x - x_C\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

b) Pour $y \in C$, on considère la fonction $[0, 1] \ni t \rightarrow y_t \in C$ donnée par $y_t = (1 - t)x_C + ty$. La quantité $\|x - y_t\|^2$ est un polynôme en t ,

$$\|x - y_t\|^2 = \|x - x_C\|^2 + 2t \operatorname{Re}(x - x_C, x_C - y) + t^2 \|x_C - y\|^2. \quad (7.1.1)$$

$\Rightarrow$ Si x_C minimise $\{\|x - y\|, y \in C\}$, alors on doit avoir

$$\forall t \in [0, 1], \quad \|x - y_t\|^2 \geq \|x - x_C\|^2$$

et en particulier la dérivée en $t = 0$, $\left. \frac{d\|x - y_t\|^2}{dt} \right|_{t=0}$, doit être positive ou nulle. Cela se traduit par

$$\operatorname{Re}(x - x_C, y - x_C) \leq 0.$$

$\Leftarrow$ Si l'inégalité ci-dessus est vérifiée alors l'expression (7.1.1) de $\|x - y\|^2 = \|x - y_1\|^2$ donne

$$\|x - x_C\|^2 \leq \|x - y\|^2.$$

c) Si C est un sous-espace vectoriel alors $x_C \pm y$ et $x_C \pm iy$ (cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) appartiennent à C quand $y \in C$. Le critère du b) donne alors

$$\forall y \in C, \pm \operatorname{Re}(x - x_C, y) \leq 0 \quad \text{et} \quad \pm \operatorname{Re}(x - x_C, iy) \leq 0.$$

Cela s'écrit tout simplement : $(x - x_C, y) = 0, \forall y \in C$.

d) Pour $x, y \in H$ on note $x_C = P_C(x)$, $y_C = P_C(y)$, $\Delta x = x - x_C$ et $\Delta y = y - y_C$. En écrivant $x = x_C + \Delta x$ et $y = y_C + \Delta y$ on obtient

$$\|y - x\|^2 = \|y_C - x_C\|^2 + \|\Delta y - \Delta x\|^2 + 2 \operatorname{Re}(y_C - x_C, \Delta y - \Delta x).$$

Or le dernier terme vaut

$$2 \operatorname{Re}(y_C - x_C, \Delta y - \Delta x) = 2 \operatorname{Re}(y_C - x_C, y - y_C) - 2 \operatorname{Re}(y_C - x_C, x - x_C).$$

C'est une somme de deux nombres positifs ou nuls.

Pour terminer nous insistons encore sur le fait que la structure d'espace de Hilbert comme celle d'espace de Banach, combine des structures algébriques et topologiques. Par exemple, on a vu qu'un sous-espace de Hilbert est nécessairement fermé. Ainsi si on considère une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ d'un espace de Hilbert H , le sous-espace de Hilbert engendré, i.e. le plus petit sous-espace de Hilbert contenant tous les x_i , doit contenir

l'espace vectoriel engendré et être fermé. C'est en fait l'adhérence de l'espace vectoriel engendré. On rappelle que $\text{Vect}(x_i, i \in I)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs x_i

$$\text{Vect}(x_i, i \in I) = \left\{ \sum_{i \in I} \alpha_i x_i \text{ finie} \right\}$$

tandis que le sous-espace de Hilbert engendré peut contenir des séries (sommations ou combinaisons linéaires infinies) convergentes. Cela nous amène à distinguer ces deux notions par les notations.

Définition 0.5 Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de vecteurs d'un espace de Hilbert H , on note $\text{Vect}(x_i, i \in I)$ l'espace vectoriel engendré et $\text{Hilb}(x_i, i \in I)$ le sous-espace de Hilbert engendré.

Applications du Théorème de la projection

Dorénavant, on travaille avec un espace de Hilbert H sur $\mathbb{K}$ dont le produit scalaire est noté $(\cdot, \cdot)$.

Sous-espace orthogonal

Définition 0.6 Si A est une partie de H , on appelle **orthogonal** de A et on note $A^\perp$ l'ensemble

$$A^\perp = \{x \in H, \forall a \in A, (a, x) = 0\}.$$

Proposition 0.5 Pour toute partie A de H , $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé.

Démonstration. Pour $a \in A$, on a $a^\perp = \text{Ker}[(a, \cdot)]$. Or la forme linéaire $H \ni x \rightarrow (a, x) \in \mathbb{K}$ est continue. Donc $a^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé. On en déduit que $A^\perp = \bigcap_{a \in A} a^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H .

Proposition 0.6 Pour deux parties A et B de H on a

- 1) $(A \subset B) \Rightarrow (B^\perp \subset A^\perp)$.
- 2) $A^\perp = (\overline{A})^\perp = (\text{Vect } A)^\perp = (\text{Hilb } A)^\perp$.

Démonstration. 1) Pour $A \subset B$, on a tout simplement

$$B^\perp = \bigcap_{a \in B} a^\perp \subset \bigcap_{a \in A} a^\perp = A^\perp.$$

2) Comme $\text{Hilb } A = \overline{\text{Vect } A}$, il suffit de montrer les deux premières égalités.

- $A^\perp \subset \overline{A}^\perp$: Cela vient du 1) et de $A \subset \overline{A}$.
- $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$: Si $x \in \overline{A}^\perp$ et $a \in \overline{A}$, on peut écrire $a = \lim_{n \in \mathbb{N}} a_n$ avec $a_n \in A$. On a alors $(a, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, x) = 0$. Cela pour tout $a \in \overline{A}$ et pour tout $x \in \overline{A}^\perp$.
- $(\text{Vect } A)^\perp \subset A^\perp$: Cela vient du 1) et de $A \subset (\text{Vect } A)$.
- $A^\perp \subset (\text{Vect } A)^\perp$: Soit $x \in A^\perp$ et soit $y = \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i$ un élément de $\text{Vect } A$, on a $(y, x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i (a_i, x) = 0$. Comme cela est vrai pour tout $y \in \text{Vect } A$ on en déduit $x \in (\text{Vect } A)^\perp$.

Proposition 0.7 Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H , on a les propriétés suivantes :

- a) $H = F \oplus F^\perp$ et P_F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ (projection orthogonale sur F).
- b) Si $F \neq \{0\}$ alors $\|P_F\| = 1$.
- c) $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration. a) Le Théorème de la projection (7.1.13) permet de définir la projection P_F sur le convexe fermé F . Pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est caractérisé par

$$\forall y \in F, (y, x - P_F(x)) = 0,$$

c'est à dire $x - P_F(x) \in F^\perp$. En écrivant $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ on vérifie que $H = F + F^\perp$. De plus si $x \in F \cap F^\perp$, alors on a $(x, x) = 0$ et donc $x = 0$. On a bien $H = F \oplus F^\perp$. Enfin l'unique décomposition $x = P_F(x) + (x - P_F(x)) \in F \oplus F^\perp$ nous assure que $P_F(x)$ est bien la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

b) Si $F \neq \{0\}$, on prend $x \in F$ non nul et la norme de l'application linéaire P_F est supérieure à $\frac{\|P_F(x)\|}{\|x\|} = 1$. De plus comme on sait que P_F est une contraction (cf. Théorème de la projection (7.1.13) d)) sa norme doit être inférieure ou égale à 1. On a donc $\|P_F\| = 1$.

c) La définition de l'orthogonal 7.2.1 donne tout de suite $F \subset (F^\perp)^\perp$. Pour l'inclusion inverse on prend $x \in (F^\perp)^\perp$ et on écrit

$$\|x - P_F(x)\|^2 = (x - P_F(x), x - P_F(x)) = (x - P_F(x), x) - (x - P_F(x), P_F(x)) = 0.$$

On en déduit $x = P_F(x) \in F$.

<https://keepmath.com>

Corollaire 0.2 Pour une partie A de H , on a $(A^\perp)^\perp = \text{Hilb } A$.

Démonstration. On a vu dans la Proposition 7.2.3, l'égalité $A^\perp = (\text{Hilb } A)^\perp$. Comme $\text{Hilb } A$ est un sous-espace vectoriel fermé on a

$$(A^\perp)^\perp = ((\text{Hilb } A)^\perp)^\perp = \text{Hilb } A.$$

Corollaire 0.3 Un sous-espace vectoriel de H est dense si et seulement si son orthogonal est $\{0\}$.

Démonstration. L'adhérence d'un sous-espace vectoriel V de H n'est autre que $\overline{V} = \text{Hilb } V$. Ainsi V est dense si et seulement si $\text{Hilb } V = H$ c'est à dire si et seulement si $V^\perp = (\text{Hilb } V)^\perp = \{0\}$.

Théorème de représentation de Riesz

Pour tout $f \in H$, la forme linéaire $H \ni x \rightarrow (f, x) \in \mathbb{K}$ est continue. Le résultat suivant donne la réciproque.

Théorème 0.2 (de représentation de Riesz) Pour toute forme linéaire continue l sur H , il existe un unique $f \in H$ tel que

$$\forall x \in H, \quad l(x) = (f, x).$$

Démonstration. Soit l une forme linéaire continue sur H . On note $F = \text{Ker } l$. C'est un sous-espace fermé puisque l est continue.

Existence : On distingue 2 cas :

1) Si $F^\perp = \{0\}$ alors on a $F = (F^\perp)^\perp = H$, $l = 0$ et on prend $f = 0$.

2) Si $F^\perp \neq \{0\}$ alors on prend $u \in F^\perp$ de norme 1. On a $l(u) \neq 0$ et pour $x \in H$ on a $x - \frac{l(x)}{l(u)}u \in \text{Ker } l = F$. Le produit scalaire $\left(u, x - \frac{l(x)}{l(u)}u\right)$ est donc nul, ce qui donne

$$\forall x \in H, l(x) = l(x)(u, u) = l(u)(u, x) = (f, x)$$

en prenant $f = \overline{l(u)}u$.

Unicité : Soit f_1 et f_2 deux vecteurs de H qui vérifient : $\forall x \in H, (f_1, x) = l(x) = (f_2, x)$. On obtient en prenant $x = f_1 - f_2$,

$$(f_1 - f_2, f_1 - f_2) = l(f_1 - f_2) - l(f_1 - f_2) = 0$$

d'où l'on tire $f_1 = f_2$.

Remarque. Ce théorème nous dit entre autre que le dual topologique H' d'un espace de Hilbert H s'identifie à H . Attention : l'identification dépend du choix du produit scalaire.

Bases hilbertiennes

Définition 0.7 Dans un espace de Hilbert H , on appelle **base hilbertienne** un système orthonormé $(e_i)_{i \in I}$ tel que $\text{Hilb}(e_i, i \in I) = H$.

<https://keepmath.com>

Remarque. Attention : Une base hilbertienne n'est pas une base au sens algébrique. Pour récupérer tout l'espace on ne se contente pas de faire des combinaisons linéaires finies. On passe à la limite aussi.

Nous allons étudier l'existence d'une base hilbertienne uniquement dans le cas précis où H est séparable (cf. Définition 1.3.10) et nous commençons par un lemme portant sur la séparabilité.

Lemme 0.1 Un espace de Hilbert H est séparable si et seulement si il existe une famille dénombrable $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $H = \text{Hilb}(x_n, n \in \mathbb{N})$.

Démonstration.

$\Rightarrow$ Si H est séparable une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dense dans H vérifie $H = \text{Hilb}(x_n, n \in \mathbb{N})$.

$\Leftarrow$ Supposons $\text{Hilb}(x_n, n \in \mathbb{N}) = H$ c'est à dire $\text{Vect}(x_n, n \in \mathbb{N})$ dense dans H . On définit par récurrence la sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ et les sous-espaces vectoriels $V_k = \text{Vect}(x_{n_0}, x_{n_1}, \dots, x_{n_k})$ tels que $\dim V_k = k+1$ et $x_{n_k} \in V_k \setminus V_{k-1}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le sous-ensemble $\bigoplus_{i=0}^{n_k} \mathbb{Q}_K x_i$ est dénombrable ($\mathbb{Q}_K$ est dénombrable) et dense dans V_k . On prend alors $D = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigoplus_{i=0}^{n_k} \mathbb{Q}_K x_i$. Il est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables et il reste à vérifier qu'il est dense. Soit $x \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme $\text{Vect}(x_n, n \in \mathbb{N}) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k$ est dense dans H il existe g_ε appartenant à un certain V_k telle que $\|f - g_\varepsilon\| \leq \varepsilon/2$. Maintenant comme $\bigoplus_{i=0}^{n_k} \mathbb{Q}_K x_i$ est dense dans V_k , on peut trouver $h_\varepsilon \in \bigoplus_{i=0}^{n_k} \mathbb{Q}_K x_i$ tel que $\|g_\varepsilon - h_\varepsilon\| \leq \varepsilon/2$. On a trouvé $h_\varepsilon \in D$ tel que $\|f - h_\varepsilon\| \leq \varepsilon$.

Exemple. a) L'espace de suites

$$l^2(\mathbb{N}; \mathbb{K}) = \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^2 < +\infty\}$$

muni du produit scalaire $(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{x_k} y_k$ est un espace de Hilbert séparable. (Il en est de même de $l^2(\mathbb{Z}; \mathbb{K})$.) En effet on considère la famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $l^2(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ donnée par $e_{n,k} = \delta_{nk}$. Alors l'espace vectoriel engendré $\text{Vect}(e_n, n \in \mathbb{N})$ n'est autre que l'espace des suites nulles en dehors d'un nombre fini d'indices (ici ce n'est rien d'autre que $\mathbb{K}[\mathbb{N}]$). Il est dense dans $l^2(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ et donc $\text{Hilb}(e_n, n \in \mathbb{N}) = l^2(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ est séparable. En fait, comme le système $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthonormé, c'est même une base hilbertienne de $l^2(\mathbb{N}; \mathbb{K})$.

b) Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, l'espace $L^2(\Omega, dx)$ ("fonctions" L^2 à valeurs dans $\mathbb{K}$) muni du produit scalaire $(f, g) = \int_{\Omega} \overline{f(x)} g(x) dx$ est séparable : L'ouvert Ω peut s'écrire comme union d'une suite croissante de compacts $\Omega = \cup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, $K_n \subset K_{n+1} \subset \Omega$. Si f est un élément quelconque de $L^2(\Omega, dx)$, la suite de terme $1_{K_n}(x)f(x)$ converge vers f dans $L^2(\Omega, dx)$. Pour $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver n_{ε} tel que $\|f - 1_{K_{n_{\varepsilon}}}(x)f(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. De plus on sait (cf. Cours d'Intégration) que $\mathcal{C}^0(K_{n_{\varepsilon}})$ est dense dans $L^2(K_{n_{\varepsilon}}, dx)$ et on peut trouver une fonction $\varphi_{\varepsilon} \in \mathcal{C}^0(K_{n_{\varepsilon}})$ telle que $\|f - \varphi_{\varepsilon}\|_{L^2(K_{n_{\varepsilon}})} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Le Théorème de Stone-Weierstrass (voir respectivement les Corollaires 6.1.2 pour le cas réel et 6.1.4 pour le cas complexe) nous dit qu'on peut approcher φ_{ε} par des polynômes en norme de la convergence uniforme. Or comme la mesure $|K_{n_{\varepsilon}}| = \int_{K_{n_{\varepsilon}}} 1 dx$ est finie, l'estimation

$$\forall \psi \in \mathcal{C}^0(K_{n_{\varepsilon}}), \quad \|\psi\|_{L^2}^2 = \int_{K_{n_{\varepsilon}}} |\psi(x)|^2 dx \leq |K_{n_{\varepsilon}}| \|\psi\|_{\infty}^2$$

nous dit que l'on peut trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ (voire $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_d, \overline{X_1}, \dots, \overline{X_d}]$ dans le cas complexe) tel que

$$\|\varphi_{\varepsilon} - P\|_{L^2(K_{n_{\varepsilon}})} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a alors $\|f - 1_{K_{n_{\varepsilon}}}(x)P(x)\| \leq \varepsilon$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$.

Autrement dit, l'espace vectoriel engendré par l'ensemble dénombrable de fonctions

$$\begin{aligned} (\mathbb{K} = \mathbb{R}) \quad & \{1_{K_n}(x) x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}, n, \alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{N}\} \\ (\mathbb{K} = \mathbb{C}) \quad & \{1_{K_n}(x) x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d} \overline{x_1}^{\beta_1} \cdots \overline{x_d}^{\beta_d}, n, \alpha_1, \dots, \alpha_d, \beta_1, \dots, \beta_d \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

est dense dans $L^2(\Omega, dx)$.

Théorème 0.3 Pour un espace de Hilbert H séparable on a les résultats suivants :

1) H admet une base hilbertienne dénombrable.

2) Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H alors on a

a) $H = \{\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n, \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty\}$ et pour $x \in H$ la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est unique et donnée par $x_n = (e_n, x)$.

b) Pour $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n \in H$ et $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} y_n e_n \in H$, le Théorème de Pythagore se généralise en

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2$$

et on a l'identité de Parseval

$$(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{x_n} y_n.$$

Remarque. La deuxième partie du théorème nous dit qu'en fait l'application $H \ni x \rightarrow (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ donnée par $x_n = (e_n, x)$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert. Ainsi il n'y a qu'un seul espace de Hilbert séparable à isomorphisme près.

Démonstration. 1) Si H est séparable, on a $H = \text{Hilb}(x_n, n \in \mathbb{N})$ et on considère comme dans la démonstration du Lemme 7.2.11 la suite de sous-espaces de dimension finie $V_k = \text{Vect}(x_0, x_1, \dots, x_{n_k})$. On utilise un procédé d'Orthogonalisation de Schmidt : Pour $k = 0$, on prend $e_0 = \frac{x_{n_0}}{\|x_{n_0}\|}$ le premier vecteur non nul normalisé à 1. Une fois $e_0, \dots, e_k$ construits, on introduit le vecteur

$$\tilde{e}_{k+1} = x_{n_{k+1}} - \sum_{i=1}^k (e_i, x_{n_{k+1}}) e_i$$

qui est non nul puisque $x_{n_{k+1}}$ n'appartient pas à

$$\text{Vect}(x_0, \dots, x_{n_{k+1}-1}) = \text{Vect}(e_0, \dots, e_k)$$

puis on le normalise à 1 en prenant

$$e_{k+1} = \frac{\tilde{e}_{k+1}}{\|\tilde{e}_{k+1}\|}.$$

On obtient ainsi une suite $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui vérifie $(e_k, e_{k'}) = \delta_{kk'}$ et $\text{Hilb}(e_k, k \in \mathbb{N}) = \text{Hilb}(x_n, n \in \mathbb{N}) = H$.

2) Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et soit $x \in H$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (e_n, x)$ et pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^N x_n e_n$. On a alors

$$\begin{aligned} \|x - S_N\|^2 &= \left\| x - \sum_{n=0}^N x_n e_n \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{n=0}^N |x_n|^2 - 2 \operatorname{Re} \left(x, \sum_{n=0}^N x_n e_n \right) \\ &= \|x\|^2 - \sum_{n=0}^N |x_n|^2. \end{aligned}$$

On en déduit pour tout $N \in \mathbb{N}$ la majoration $\sum_{n=0}^N |x_n|^2 \leq \|x\|^2$ de telle sorte que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$. Maintenant pour $N > M$ on utilise le Théorème de Pythagore fini (Proposition 7.1.9) pour calculer

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\| \sum_{n=M+1}^N x_n e_n \right\|^2 = \sum_{n=M+1}^N |x_n|^2.$$

Avec la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2$, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ N_ε , tel que $\|S_N - S_M\| \leq \varepsilon$ pour $N, M \geq N_\varepsilon$. Ainsi la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H qui est complet. Elle admet une limite que l'on note pour l'instant $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n$. En utilisant la continuité du produit scalaire on obtient pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$(e_m, x - S) = (e_m, x) - \left(e_m, \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n \right) = x_m - x_m = 0.$$

Donc $x - S$ est orthogonal à $H = \text{Hilb}(e_m, m \in \mathbb{N})$. Il est donc nul, $x = S = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n$. Enfin comme $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = x$ la première relation nous donne $\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2$ et l'identité de Parseval s'obtient facilement par passage à la limite.

<https://keepmath.com>

<https://keepmath.com>