

Chapitre 5 : Espaces métriques complets

Jusqu'à présent on pouvait parler de la convergence d'une suite seulement quand on connaissait a priori la limite. La complétude qui est une notion métrique permet de prédire l'existence d'une limite à partir de propriétés de la suite. Dans tout ce chapitre on se placera dans le cadre d'un espace métrique (X, d) .

Suites de Cauchy, espaces métriques complets, exemple fondamental

Suites de Cauchy

Définition 0.1 On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X, d) est de **Cauchy** si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_\varepsilon, d(x_m, x_n) \leq \varepsilon.$$

Proposition 0.1 Une suite de Cauchy est toujours bornée.

Démonstration. Il existe N_1 tel que : $\forall m, n \geq N_1, d(x_m, x_n) \leq 1$. En particulier on a pour $n \geq N_1, d(x_n, x_{N_1}) \leq 1$ et en posant $M = \max_{k < N_1} d(x_k, x_{N_1})$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{N_1}) \leq \max\{M, 1\}.$$

Proposition 0.2 Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (X, d) telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = l \in X$. Pour $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left(\forall m, n \geq N_\varepsilon, d(x_m, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2} \right) \text{ et } \left(\forall k \geq k_\varepsilon, d(x_{n_k}, l) \leq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

On prend $N_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$ et on a pour $n \geq N_\varepsilon$

$$d(x_n, l) \leq d(x_n, x_{n_{k_\varepsilon}}) + d(x_{n_{k_\varepsilon}}, l) \leq \varepsilon.$$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

Espace métrique complet

Proposition 0.3 Toute suite convergente est de Cauchy.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de (X, d) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in X$. Pour $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, l) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq N_\varepsilon$. On a alors

$$\forall m, n \geq N_\varepsilon, d(x_m, x_n) \leq d(x_m, l) + d(l, x_n) \leq \varepsilon$$

et la suite est de Cauchy.

Définition 0.2 On dit que l'espace métrique (X, d) est **complet** si toute suite de Cauchy converge.

Exemple fondamental

Théorème 0.1 $\mathbb{R}$ est complet.

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Elle est bornée : $\forall n \in \mathbb{N}, |x_n| \leq M$. On peut donc extraire une sous-suite qui converge dans $\mathbb{R}$ (puisque $[-M, M]$ est compact). Mais alors la Proposition 5.1.3 donne la convergence de toute la suite.

Remarque. On peut faire une démonstration sans utiliser l'argument de compacité et en revenant à la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$. Il suffit pour cela de montrer que les suites $y_n = \inf_{p \geq n} x_p$ et $z_n = \sup_{p \geq n} x_p$ sont des suites adjacentes.

Exemple. $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. On peut approcher un irrationnel $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ par une suite de rationnels $x_n = \frac{p_n}{q_n}$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc dans $\mathbb{Q}$. Elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ puisque $r \notin \mathbb{Q}$.

Un autre exemple

Théorème 0.2 Si X est un ensemble et (X', d') est un espace métrique complet, alors $\mathcal{F}_b(X; X')$ muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme est complet.

Démonstration. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{F}_b(X; X'), d_\infty)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_\varepsilon, \sup_{x \in X} d'(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon.$$

<https://keepmath.com>

En particulier pour $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X', d') qui est complet et admet donc une limite dans X' que l'on note $f(x)$.

On a ainsi défini une fonction $f : X \rightarrow X'$. Vérifions qu'elle est bornée sur X . Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $d_\infty(f_{N_1}, f_n) \leq 1$ pour tout entier $n \geq N_1$. On a alors pour $y_0 \in X'$ (on note également y_0 la fonction constante $X \rightarrow X'$ associée)

$$\forall x \in X, \forall n \geq N_1, d'(y_0, f_n(x)) \leq d'(y_0, f_{N_1}(x)) + 1 \leq d_\infty(y_0, f_{N_1}) + 1$$

et en prenant la limite $n \rightarrow \infty$ (pour $x \in X$ fixé) on obtient

$$\forall x \in X, d'(y_0, f(x)) \leq d_\infty(y_0, f_{N_1}) + 1$$

et $f \in \mathcal{F}_b(X; X')$.

Vérifions enfin que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{F}_b(X; X')$ pour la distance de la convergence uniforme d_∞ . Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, on a l'inégalité $d'(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$ pour $m, n \geq N_\varepsilon$. On prend la limite $m \rightarrow \infty$ à $x \in X$ fixé et on obtient

$$\forall x \in X, \forall n \geq N_\varepsilon, d'(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon,$$

ce qui s'écrit aussi, puisque N_ε ne dépend pas de x , $d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$. Ainsi on a $\lim_{n \rightarrow \infty} d_\infty(f_n, f) = 0$ et la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $(\mathcal{F}_b(X; X'), d_\infty)$.

Remarque. La démonstration ci-dessus procède d'une méthode assez générale pour établir la complétude d'un espace métrique : 1) Identifier une limite possible pour la suite de Cauchy (souvent en utilisant un résultat de complétude connu et en faisant intervenir une topologie mieux connue) ; 2) Vérifier que l'éventuelle limite est bien dans l'ensemble ; 3) Vérifier que la suite converge bien vers cette limite pour la distance de départ. Pour 2) et 3) il faut bien faire attention aux dépendances par rapport à ε (et $x \in X$ pour des espaces de fonctions) et travailler avec des inégalités larges (plus facile pour passer à la limite).

Propriétés des espaces complets

Fermés de complets

Proposition 0.4 *Dans un espace métrique complet (X, d) , les sous-espaces complets sont les fermés.*

Démonstration. Soit F une partie d'un espace métrique complet (X, d) .

$\Leftarrow$ Supposons F fermé. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (F, d) , c'est une suite de Cauchy de (X, d) . Elle admet donc une limite dans X . Mais comme F est fermé cette limite appartient à F .

$\Rightarrow$ Supposons (F, d) complet. Si une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de F admet une limite $l \in X$, alors elle est de Cauchy dans (X, d) et donc dans (F, d) . Comme (F, d) est complet elle converge dans F et comme (X, d) est séparé cela entraîne $l \in F$. F est fermé.

<https://keepmath.com>

Corollaire 0.1 *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et (X', d') est un espace métrique complet, l'espace $\mathcal{C}_b^0(X; X')$ des fonctions continues bornées de X dans X' muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme est complet.*

Démonstration. D'après le Théorème 1.5.26, c'est une partie fermée de l'espace métrique complet $(\mathcal{F}_b(X; X'), d_\infty)$. Il est donc complet.

Corollaire 0.2 *Soit (X, d) un espace métrique. Une intersection quelconque de sous-espaces complets est complète.*

Démonstration. L'intersection $\bigcap_{i \in I} F_i$ est une intersection de fermés donc un fermé de l'espace complet (F_{i_0}, d) . C'est un complet.

Union de complets et complétude des compacts

Proposition 0.5 *Soit (X, d) un espace métrique. Une union finie de sous-espaces complets de (X, d) est complète.*

Démonstration. Soit $(A_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ une famille finie de parties complètes de (X, d) . Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (X, d) , il existe $i_0 \in \{1, \dots, N\}$ et une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $x_{n_k} \in A_{i_0}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dans ce cas la sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (A_{i_0}, d) qui est complet. On a trouvé une sous-suite convergente et on conclut avec la Proposition 5.1.3.

Proposition 0.6 *Tout espace métrique compact est complet.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'un espace métrique compact (X, d) . On peut en extraire une sous-suite qui converge dans (X, d) et on conclut avec la Proposition 5.1.3.

Produit d'espaces complets

Proposition 0.7 *Un produit fini ou dénombrable d'espaces métriques complets est complet.*

Démonstration. Le cas fini a déjà été traité dans le Théorème 5.1.9 puisque pour les produits finis convergence simple (topologie produit) et convergence uniforme coïncident. Il reste à traiter le cas dénombrable. Soit $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques complets. On note d la distance sur $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ donnée par

$$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}$$

pour laquelle la topologie associée est la topologie produit. Soit $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n, d)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé et $k, l \in \mathbb{N}$ assez grands, on a $d_n(x_n^k, x_n^l) \leq \frac{2^n d(x^k, x^l)}{1 - 2^n d(x^k, x^l)}$. Ainsi la suite $(x_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X_n, d_n) et donc converge dans X_n . Ainsi la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge pour la topologie de la convergence simple dans $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, mais cette topologie n'est rien d'autre que la topologie associée à d .

Exemple. Ainsi $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, M_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{C})$, tous les espaces vectoriels normés de dimension finie et leurs parties fermées sont des espaces métriques complets. Si on met la distance d sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme ci-dessus, c'est un espace métrique complet mais cette distance n'est pas associée à une norme (cf. Exercice 116).

Espaces de Banach

On travaille avec le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 0.3 *On appelle **espace de Banach** un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé complet.*

Proposition 0.8 *Les $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie sont des espaces de Banach.*

Proposition 0.9 *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $(E, |||_E)$ est un espace de Banach alors $\mathcal{F}_b(X; E)$ et $\mathcal{C}_b^0(X; E)$ munis de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E$ sont des espaces de Banach.*

Démonstration. Déjà fait avec le Corollaire 5.2.2). Il suffit de prendre $(X', d') = (E, |||_E)$.

Exemple. L'espace $\mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$ muni de $|||_{\infty}$ est un espace de Banach. En revanche $\mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $|||_1$ n'est pas complet. On prend la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par $f_n(x) = 1$ pour $x \leq 0$, $f_n(x) = 1 - (n+1)x$ pour $0 \leq x \leq \frac{1}{n+1}$ et $f_n(x) = 0$ pour $\frac{1}{n+1} \leq x \leq 1$.

On a alors

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_{-1}^1 |f_n(x) - f_m(x)| dx \leq \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(m+1)} \leq \varepsilon$$

pour $m, n \geq \varepsilon^{-1}$. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy mais ne peut pas converger dans $\mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. Une fonction qui vaut 1 sur $[-1, 0[$ et 0 sur $]0, 1]$ n'est pas continue.

La complétude d'un espace vectoriel normé est très utile pour étudier la convergence des séries.

Définition 0.4 Dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ on dit qu'une série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ est **absolument convergente** (ou **normalement convergente**) si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_E < +\infty$.

Théorème 0.3 Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente converge dans E ,

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_E < \infty \right) \Rightarrow \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \in E \right).$$

Démonstration.

$\Rightarrow$ Supposons $(E, \|\cdot\|_E)$ complet. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E telle que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_E < \infty$. Alors les sommes $S_N = \sum_{n \leq N} x_n$ vérifient pour $M \geq N$

$$\|S_M - S_N\|_E = \left\| \sum_{n=N+1}^M x_n \right\|_E \leq \sum_{n=N+1}^M \|x_n\|_E.$$

Ainsi, la suite $(S_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$ et donc converge.

$\Leftarrow$ Supposons que toute série absolument convergente converge. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|_E)$. On peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$ (il suffit de prendre $n_k = N_{2^{-k}}$). On pose alors $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$ est absolument convergente donc converge dans $(E, \|\cdot\|_E)$ par hypothèse. Or on a $x_{n_{k+1}} - x_{n_0} = \sum_{j=0}^k u_j$ et on en déduit que la sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans $(E, \|\cdot\|_E)$. Avec la Proposition 5.1.3 on obtient $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_{n_0} + \sum_{k \in \mathbb{N}} u_k$.

Applications de la complétude

Un exemple avec les séries

On munit $M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d'une norme d'algèbre (par exemple $\|A\| = \max \|A\|_\infty$).

Proposition 0.10 Si $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors la série $f(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n A^n$ converge dès que $\|A\| < R$.

Démonstration. Puisque $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, on a pour $n \in \mathbb{N}$, $\|c_n A^n\| = |c_n| \|A^n\| \leq |c_n| \|A\|^n$. Pour $\|A\| < R$, on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} |c_n| \|A\|^n < +\infty$ et la série $f(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n A^n$ est absolument convergente donc convergente.

Exemple. Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ on peut définir e^{tA} , e^{itA} , $\cos(tA)$, ... et pour $\|A\| < 1$ ($\|\cdot\|$ norme d'algèbre), $(Id + A)^{-1}$ et $\ln(Id + A)$.

Prolongement

Théorème 0.4 (Théorème de prolongement) Soit (X, d) , (X', d') deux espaces métriques, avec (X', d') complet et soit $Y \subset X$. Si une application $f : Y \rightarrow X'$ est uniformément continue et si Y est dense dans X , alors f admet un unique prolongement par continuité $\tilde{f} : X \rightarrow X'$.

Démonstration. D'après la Proposition 1.5.24, il s'agit de montrer que pour tout $x \in X$ la limite $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} f(y)$ existe dans X' . Comme (X, d) est un espace métrique on peut utiliser les suites $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Y telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x \in X$. Une telle suite est nécessairement de Cauchy dans (X, d) et donc dans (Y, d) . Comme f est uniformément continue, la suite image $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X', d') qui est complet. Par conséquent cette suite image $(f(y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (X', d') et ce pour toute suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Y convergeant vers x . La Proposition 1.4.14 assure l'indépendance de la limite par rapport au choix de la suite et nous dit que la limite $\lim_{\substack{y \rightarrow x \\ y \in Y}} f(y)$ existe.

Corollaire 0.3 Si $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace vectoriel normé, $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach et si D est un sous-espace vectoriel dense de E , toute application linéaire continue $(D, \|\cdot\|_E) \rightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ se prolonge en une application linéaire continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

<https://keepmath.com>

Exemple. L'intégrale définie de $\mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, $\int_0^1 f(t) dt$ est continue quand on munit $\mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_1$. Comme $\mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{R})$ est dense dans $(L^1([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ qui est complet (cf. Cours d'Intégration), elle se prolonge de manière unique en une application linéaire continue à $L^1([0, 1]; \mathbb{R})$.

Point fixe des applications contractantes

Théorème 0.5 (Picard) Soit (X, d) un espace métrique complet. Si l'application $f : X \rightarrow X$ est une application contractante

$$\forall x, y \in X, d(f(y), f(x)) \leq \alpha d(y, x), \quad \alpha < 1,$$

alors elle admet un unique point fixe $x \in X$, $f(x) = x$. De plus toute suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in X$ converge géométriquement vers x

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, x) \leq d(x_0, x) \alpha^n.$$

Démonstration.

1. Unicité : Supposons que $x_1, x_2 \in X$ soient deux points fixes de f . On a alors

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_2), f(x_1)) \leq \alpha d(x_2, x_1).$$

L'inégalité $(1 - \alpha)d(x_1, x_2) \leq 0$ avec $\alpha < 1$ entraîne $x_2 = x_1$.

2. Existence : On va construire x par une méthode d'approximation successive. On considère une suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ avec $x_0 \in X$. Pour $m, n \in \mathbb{N}$ on a en supposant $n \geq m$

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=m}^n d(x_{k+1}, x_k) = \sum_{k=m}^{n-1} d[f^k(x_1), f^k(x_0)].$$

La propriété de contraction avec $\alpha < 1$ donne

$$d[f^k(x_1), f^k(x_0)] \leq \alpha d[f^{k-1}(x_1), f^{k-1}(x_0)] \leq \alpha^k d(x_1, x_0)$$

puis

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_1, x_0).$$

Pour $\varepsilon > 0$, on prend $N_\varepsilon > \frac{\ln(1-\alpha)\varepsilon/d(x_0, x_1)}{\alpha}$ et on a pour $m, n \geq N_\varepsilon$, $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X, d) . Elle admet une limite $x \in X$ qui doit vérifier puisque f est continue $f(x) = x$.

3. Convergence géométrique : Pour une suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in X$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, x) = d[f^n(x_0), f^n(x)] \leq \alpha^n d(x_0, x)$$

et la convergence vers x est géométrique de raison α .

<https://keepmath.com>

Complété

Théorème 0.6 Si (X, d) est un espace métrique, il existe un espace métrique $(\tilde{X}, \tilde{d})$ complet dont (X, d) est un sous-espace dense. Cet espace est unique à isométrie près. On l'appelle le **complété** de (X, d) .

Démonstration.

1. Unicité : Supposons que (X, d) soit un sous-espace dense de deux espaces métriques (X_1, d_1) et (X_2, d_2) dont les distances d_1 et d_2 prolongent d . Le plongement $i_2 : (X, d) \rightarrow (X_2, d_2)$ est une isométrie. En particulier elle est uniformément continue tandis que X est dense dans (X_1, d_1) et tandis que (X_2, d_2) est complet. Elle se prolonge donc de façon unique en une isométrie de $\tilde{i}_2 : (X_1, d_1) \rightarrow (X_2, d_2)$. De même l'isométrie $i_1 : (X, d) \rightarrow (X_1, d_1)$ a un unique prolongement isométrique $\tilde{i}_1$ de X_2 dans X_1 . Enfin comme $\tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2|_X = Id_X$, on a par unicité du prolongement continu $\tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2 = Id_{X_1}$. L'isométrie $\tilde{i}_1$ est surjective donc une bijection isométrique de X_2 sur X_1 . Les espaces (X_1, d_1) et (X_2, d_2) sont identiques.
2. Existence : On considère $\mathcal{C}_X$ l'ensemble des suites de Cauchy de (X, d) . Si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de Cauchy de X alors l'écart

$$\begin{aligned} |d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| &\leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y_m)| + |d(x_n, y_m) - d(x_m, y_m)| \\ &\leq d(y_n, y_m) + d(x_n, x_m) \end{aligned}$$

est plus petit que $\varepsilon > 0$ pour $m, n \geq N_\varepsilon$ avec N_ε assez grand puisque x et y sont deux suites de Cauchy. Ainsi la suite $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc converge. On pose alors

$$\forall x, y \in \mathcal{C}_X, \delta(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Par passage à la limite, on a pour tout $x, y, z \in \mathcal{C}_X$

$$\delta(y, x) = \delta(x, y) \quad \text{et} \quad \delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z).$$

Afin de définir une distance à partir de δ , on met sur $\mathcal{C}_X$ la relation d'équivalence

$$(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (\delta(x, y) = 0) \Leftrightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = 0 \right),$$

et on prend pour $\tilde{X}$ l'ensemble quotient $\mathcal{C}_X / \mathcal{R}$ et pour $\tilde{d}$ la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{d}: \quad \tilde{X} \times \tilde{X} &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (\hat{x}, \hat{y}) &\rightarrow \tilde{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \delta(x, y). \end{aligned}$$

La quantité $\delta(x, y)$ ne dépend pas du choix de x dans la classe d'équivalence $\hat{x}$ et du choix de y dans sa classe $\hat{y}$ grâce à l'inégalité triangulaire. Il reste à vérifier que $(\tilde{X}, \tilde{d})$ est un espace métrique complet dans lequel X est inclus et dense.

a) $\tilde{d}$ est une distance sur $\tilde{X}$. La symétrie et l'inégalité triangulaire sont héritées de δ et l'équivalence $(\tilde{d}(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$ vient du passage au quotient.

b) $X \subset \tilde{X}$: Pour $a \in X$ on considère la suite constante $x[a] = (x_n = a)_{n \in \mathbb{N}}$ qui est un élément de $\mathcal{C}_X$ et on identifie a et $\hat{x}[a]$. De plus le plongement de (X, d) dans $(\tilde{X}, \tilde{d})$ est isométrique puisque $\tilde{d}(\hat{x}[a], \hat{x}[b]) = \delta(x[a], x[b]) = d(a, b)$.

c) Soit $(\hat{x}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\tilde{X}, \tilde{d})$. En prenant des représentants cela revient à considérer une suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}_X$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq N_\varepsilon, \delta(x^m, x^n) \leq \varepsilon.$$

i) Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $x^n = (x_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X et il existe $k_n \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall k, k' \geq k_n, d(x_k^n, x_{k'}^n) \leq \frac{1}{n+1}$. Procédé diagonal : On considère la suite $x = (x_{k_n}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X .

ii) $x \in \mathcal{C}_X$: Pour $m, n, k \in \mathbb{N}$, on écrit

$$d(x_n, x_m) = d(x_{k_n}^n, x_{k_m}^m) \leq d(x_{k_n}^n, x_k^n) + d(x_k^n, x_k^m) + d(x_{k_m}^m, x_k^m)$$

et en prenant $k \geq \max\{k_n, k_m\}$,

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} + d(x_k^n, x_k^m).$$

Pour $\varepsilon > 0$ il existe N_ε tel que $\delta(x^n, x^m) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ pour $m, n \geq N_\varepsilon$. Pour de tels m et n on a alors par définition de δ , $d(x_k^n, x_k^m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour k assez grand. Ainsi, on obtient

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{\varepsilon}{2}$$

et on peut trouver $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ pour $m, n \geq N_\varepsilon$.

iii) $\hat{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}^n$: Il suffit de montrer $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(x^n, x) = 0$. Pour $n, j \in \mathbb{N}$ on a

$$d(x_j^n, x_j) \leq d(x_j^n, x_n) + d(x_n, x_j) = d(x_j^n, x_{k_n}^n) + d(x_n, x_j).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Avec les notations précédentes, on a pour $n \geq N_\varepsilon$ et $j \geq \max\{k_n, N_\varepsilon\}$

$$d(x_j^n, x_j) \leq \frac{1}{n+1} + \varepsilon.$$

En prenant la limite quand $j \rightarrow \infty$ on obtient

$$\forall n \geq N'_\varepsilon, \delta(x^n, x) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_j^n, x_j) \leq \frac{1}{n+1} + \varepsilon.$$

Et en prenant $n \geq N'_\varepsilon$ avec N'_ε assez grand cela donne $\delta(x^n, x) \leq 2\varepsilon$.

d) X est dense dans $(\tilde{X}, \tilde{d})$: Si $\hat{x}$ est un élément quelconque de $\tilde{X}$, on prend un représentant $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}_X$ et on considère la suite de suites constantes $(\hat{x}[x_n])_{n \in \mathbb{N}}$ (la classe de la suite constante $x[a] \in \mathcal{C}_X$ s'identifiant avec l'élément a de X). On a alors

$$\delta(\hat{x}[x_n], x) = \lim_{k \rightarrow \infty} d(x_n, x_k) \leq \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq N_\varepsilon$. On a donc $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{x}[x_n] = \hat{x}$ dans $(\tilde{X}, \tilde{d})$.