

Espaces topologiques, espaces métriques

Espaces topologiques : généralités

Définition 0.1. Soit $E \neq \emptyset$. Un espace topologique est un couple (E, τ) où E est un ensemble et $\tau \subset \mathcal{P}(E)$ tel que :

- $\forall (\omega_i)_{i \in I} \in \tau^I, \bigcup_{i \in I} \omega_i \in \tau$.
- τ est stable par intersection finie.
- $\emptyset, E \in \tau$.

Les éléments de τ sont appelés **ouverts**. On appelle **fermés** les complémentaires des ouverts. τ est la topologie sur E .

Définition 0.2. Soit E muni de τ_1 et τ_2 . On dit que τ_1 est plus **grossière** que τ_2 ou que τ_2 est plus **fine** que τ_1 ssi $\tau_1 \subset \tau_2$.

Notion de voisinage d'un point

Définition 0.3. Soit (E, τ) un espace topologique et $x \in E$. On appelle **voisinage** de x tout $V \subset E$ contenant un ouvert $\omega \in \tau$ avec $x \in \omega$. On note $\mathcal{V}_x$ l'ensemble des voisinages de x .

Proposition 0.1. — $\forall V \in \mathcal{V}_x, V \subset V' \Rightarrow V' \in \mathcal{V}_x$.

- $\forall (V_i)_{i \in [1, p]} \in \mathcal{V}_x^p, \bigcap_{i=1}^p V_i \in \mathcal{V}_x$.

Théorème 0.1. Soit (E, τ) un espace topologique et $\omega \subset E$. ω est ouvert ssi ω est un voisinage de tous ses points.

Bases d'ouverts et de voisinages

Définition 0.4. $\mathcal{B} \subset \tau$ est une **base d'ouverts** ssi tout ouvert est réunion d'ouverts de $\mathcal{B}$.

$\mathcal{B}_x \subset \mathcal{V}_x$ est une **base de voisinages** de x (ou système fondamental de voisinages de x) ssi $\forall V \in \mathcal{V}_x, \exists B \in \mathcal{B}_x, x \in B \subset V$.

Proposition 0.2. Soit $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \tau$ avec $\emptyset \in \mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts ssi $\forall x \in E, \mathcal{B}_x = \{b \in \mathcal{B}, x \in b\}$ est une base de voisinages de x .

Définition 0.5. (E, τ) est **séparé** (de Hausdorff) ssi

$$\forall x \neq x' \in E, \quad \exists (\omega_x, \omega_{x'}) \in \tau^2 \text{ tel que } x \in \omega_x, x' \in \omega_{x'} \text{ et } \omega_x \cap \omega_{x'} = \emptyset.$$

Proposition 0.3. Dans un espace topologique séparé, tous les points sont fermés.

Espaces métriques

Distances et espaces métriques

Définition 0.6. On appelle **distance** sur E toute application de $E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- $d(x, y) = 0$ ssi $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Définition 0.7. On appelle **boule ouverte** (resp. **fermée**) de centre $x \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ et on note $\hat{B}_d(x, r)$ (resp. $\bar{B}_d(x, r)$) l'ensemble $\{y \in E, d(x, y) < r\}$ (resp. $\{y \in E, d(x, y) \leq r\}$).

Définition 0.8. Soit (E, d) un espace métrique. On appelle **topologie associée à d** la topologie τ_d définie sur E par :

$$\tau_d = \{\omega \in \mathcal{P}(E), \forall x \in \omega, \exists r > 0, \hat{B}_d(x, r) \subset \omega\}.$$

Proposition 0.4. Soit (E, d) un espace métrique. Les boules ouvertes sont des ouverts de E . Elles forment une base d'ouverts de τ_d . Les boules fermées sont des fermés de E .

Corollaire 0.1. Tout ouvert de τ_d est réunion de boules ouvertes.

Corollaire 0.2. — $\{\hat{B}^d(x, r), r > 0\}$ est une base de voisinages de x .

— $\{\hat{B}^d(x, 1/n), n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base de voisinages dénombrable de x .

Définition 0.9. On dit que (E, τ) est **métrisable** ssi il existe une distance d sur E tel que $\tau = \tau_d$.

Comparaisons de structures métriques

Théorème 0.2. Soit E un espace métrique muni de deux distances d_1 et d_2 . Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que $d_1 \leq cd_2$. Alors $\tau_{d_1} \subset \tau_{d_2}$.

Remarque 0.1. Dans le cas où $d_1 \leq cd_2 \leq c'd_1$, on dit que les distances sont fortement équivalentes, ce qui implique que $\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$. La réciproque est fausse.

Cas des espaces vectoriels normés

Définition 0.10. Soit E un $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ espace vectoriel. On appelle **norme** sur E toute application de $E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Remarque 0.2. $d(x, x') = \|x - x'\|$ est alors une distance.

Proposition 0.5. Si E est un espace vectoriel normé muni de $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, $\tau_1 \subset \tau_2$ ssi $\exists c > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq c \|\cdot\|_2$.

Autres exemples de topologies

Topologie induite

Définition 0.11. Soit (E, τ) un espace topologique et $A \subset E$. On appelle **topologie induite** sur A par τ la topologie τ_A définie par $\tau_A = \{\omega \cap A, \omega \in \tau\}$.

Proposition 0.6. Si $\tau = \tau_d$, $\tau_A = \tau_{d|_A}$.

Topologie engendrée par une famille de parties

Définition 0.12. On appelle **topologie engendrée** par $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ la plus petite topologie contenant $\mathcal{A}$: $\tau_{\mathcal{A}} = \bigcap_{\tau \supset \mathcal{A}} \tau$.

Proposition 0.7. Les intersections finies des éléments de $\mathcal{A}$ forment une base d'ouverts de $\tau_{\mathcal{A}}$.

Topologie produit

Définition 0.13. On appelle **topologie produit** sur $E_1 \times E_2$ la topologie engendrée par les $\{\omega_1 \times \omega_2, \omega_1 \in \tau_1, \omega_2 \in \tau_2\}$. Ces éléments forment une base d'ouverts.

Proposition 0.8. Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques. La topologie produit de τ_{d_1} et de τ_{d_2} est métrisable. Elle est associée aux distances suivantes :

- $d_p(x, y) = \sqrt[p]{(d_1(x_1, y_1))^p + (d_2(x_2, y_2))^p}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.
- $d_\infty(x, y) = \max(d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2))$.

Définition 0.14. On appelle **topologie produit** sur $\prod_{i=1}^p E_i$ la topologie engendrée par les $\{\prod_{i=1}^p \omega_i, \forall i \in [1, p], \omega_i \in \tau_i\}$. Ces éléments forment une base d'ouverts.

Définition 0.15. On appelle **topologie produit** sur $\prod_{i \in I} E_i$ (avec $E_i \neq \emptyset$) la topologie engendrée par les :

$$\left\{ \prod_{i \in I} \Omega_i, \exists J \text{ finie } \subset I \text{ vérifiant } \forall i \in I \setminus J, \Omega_i = E_i \text{ et } \forall i \in J, \Omega_i \in \tau_i \right\}$$

Proposition 0.9. On suppose I non dénombrable et $\text{Card}(E_i) \geq 2$. La topologie produit n'est pas métrisable.

Proposition 0.10. Soit $(E_n, d_n)_n$ une famille d'espaces métriques. La topologie produit sur $\prod_{n \geq 0} E_n$ est métrisable.

Topologie quotient

Définition 0.16. Si (E, τ) est un espace topologique, on appelle **topologie quotient** sur $E/\mathcal{R}$ la topologie $\tau_{\mathcal{R}}$ définie par :

$$\tau_{\mathcal{R}} = \{O \in \mathcal{P}(E/\mathcal{R}), \chi^{-1}(O) \in \tau\}$$

où $\chi : E \rightarrow E/\mathcal{R}$ est la surjection canonique.

Remarque 0.3. — $\tau_{\mathcal{R}}$ n'est pas forcément séparée même si τ l'est.

— Il n'y a pas de métrique naturelle associée à $\tau_{\mathcal{R}}$.

Intérieur, adhérence, frontière, limites

Définitions

Définition 0.17. Soit (E, τ) un espace topologique et $A \subset E$.

— $a \in E$ est dit **adhérent** à A ssi $\forall V \in \mathcal{V}_a, V \cap A \neq \emptyset$.

— On note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A . $\overline{A}$ est appelé **adhérence** (ou fermeture) de A .

— $a \in E$ est dit **intérieur** à A ssi $\exists \omega \in \tau$ avec $a \in \omega \subset A$ ssi $A \in \mathcal{V}_a$.

— On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A . $\overset{\circ}{A}$ est appelé **intérieur** de A .

Proposition 0.11. $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A .

Proposition 0.12. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A .

Définition 0.18. On définit la **frontière** ∂A de A par $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Proposition 0.13. ∂A est un fermé.

Définition 0.19. Soit (E, τ) un espace topologique et $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que a est une **valeur d'adhérence** de x ssi tout voisinage de a contient une infinité de termes de x .

Proposition 0.14. a est une valeur d'adhérence de x ssi

$$a \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{x_N, x_{N+1}, \dots\}}.$$

Définition 0.20. Soit (E, τ) un espace topologique et $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que x **converge** vers a quand $n \rightarrow +\infty$ et on écrit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ou $x_n \xrightarrow{+\infty} a$ ssi $\forall V \in \mathcal{V}_a, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, x_n \in V$.

Proposition 0.15. Si (E, τ) est séparé, une suite a au plus une limite.

Cas des espaces métriques

Remarque 0.4. Soit (E, d) un espace métrique.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a \quad \text{ssi} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, a) = 0.$$

Proposition 0.16. Soit (E, d) un espace métrique.

- A est fermé ssi $A = \overline{A}$ ssi $\forall (x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in E$, $a \in A$.
- $a \in \overline{\text{adh}(x)}$ ssi $\exists \varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \rightarrow a$.

Continuité et homéomorphismes

Définitions

Définition 0.21. Soient (E, τ) et (E', τ') deux espaces topologiques.

- $f : (E, \tau) \rightarrow (E', \tau')$ est dite **continue** ssi $\forall \omega' \in \tau', f^{-1}(\omega') \in \tau$.
- (formulation équivalente) f est continue ssi elle l'est en tout point : $\forall x \in E, \forall V' \in \mathcal{V}_{f(x)}, f^{-1}(V') \in \mathcal{V}_x$.

Définition 0.22. On dit que f est **ouverte** (resp. **fermée**) ssi l'image de tout ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. fermé).

Définition 0.23. $f : (E, \tau) \rightarrow (E', \tau')$ est un **homéomorphisme** ssi f est bijective, continue et f^{-1} est continue (i.e. continue bijective ouverte).

Cas des espaces métriques

Proposition 0.17. $f : (E, d) \rightarrow (E', d')$ est continue en $x \in E$ ssi $\forall (x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{d} x \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{d'} f(x)$.

Définition 0.24. $f : (E, d) \rightarrow (E', d')$ est dite :

- **uniformément continue** ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, x') \in E^2, d(x, x') \leq \eta \Rightarrow d'(f(x), f(x')) \leq \varepsilon$.
- **lipschitzienne** ssi $\exists k > 0, \forall (x, x') \in E^2, d'(f(x), f(x')) \leq kd(x, x')$.
- **hölderienne** ssi $\exists k > 0, \exists \alpha \in]0, 1], \forall (x, x') \in E^2, d'(f(x), f(x')) \leq kd(x, x')^\alpha$.

Continuité et topologie induite

Proposition 0.18. Soit $f : (E, \tau) \rightarrow (E', \tau')$ continue et $A \subset E$. $f|_A : (A, \tau|_A) \rightarrow (E', \tau')$ et $f : (E, \tau) \rightarrow (f(E), \tau'|_{f(E)})$ sont continues.

Continuité et topologie produit

Proposition 0.19. Soit $(E_i, \tau_i)_i$ une famille de topologies et $E = \prod_{i \in I} E_i$.

$$X_n \xrightarrow{\tau_I} X \quad \text{ssi} \quad \forall i \in I, X_n^i \xrightarrow{\tau_i} X^i.$$

Proposition 0.20. La topologie de la convergence simple de $(f_n) \in (F^E)^{\mathbb{N}}$ est une topologie produit.

Proposition 0.21. La projection $\pi_{i_0} : (E, \tau_I) \rightarrow (E_{i_0}, \tau_{i_0})$ est continue.

Proposition 0.22. $f : (X, \tau) \rightarrow (\prod_{i \in I} E_i, \tau_I)$ est continue ssi pour tout $i \in I$, $\pi_i \circ f$ l'est.

Théorème 0.3. Soient f et g deux fonctions de $(E, \tau) \rightarrow (E', \tau')$ avec (E', τ') séparé. Si f et g sont continues, alors $\{x \in E, f(x) = g(x)\}$ est fermé et le graphe $G_f = \{(x, y) \in E \times E', y = f(x)\}$ aussi.

Continuité et topologie quotient

Proposition 0.23. Par définition de $\tau_{\mathcal{R}}$, $\chi : x \mapsto \bar{x}$ est continue.

Définition 0.25. Soit $f : E \rightarrow E'$. On définit $\mathcal{R}_f$ par $x\mathcal{R}_fy$ ssi $f(x) = f(y)$. f se factorise sur $E/\mathcal{R}_f$ en $\tilde{f}$ définie par $f = \tilde{f} \circ \chi$.

Proposition 0.24. f est continue ssi $\tilde{f}$ l'est.

Continuité et espaces vectoriels normés

Proposition 0.25. Soit $f : (E, \|\cdot\|_E) \rightarrow (E', \|\cdot\|_{E'})$ linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue
2. f est continue en 0
3. f est bornée sur les bornés
4. f est lipschitzienne

Définition 0.26. On définit

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,E')} = \min\{k, \forall x \in E, \|f(x)\|_{E'} \leq k\|x\|_E\}.$$

Proposition 0.26.

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathcal{L}(E,E')} &= \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_{E'}}{\|x\|_E} \\ &= \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_{E'} \\ &= \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_{E'}\end{aligned}$$

<https://keepmath.com>

Site : <https://keepmath.com>