

Examens: Dualité - Déterminants

Examens avec solutions détaillées

Durée: 2 heures

Examen 1

Exercice 1 (6 points)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n et soit $\varphi \in E^*$ une forme linéaire non nulle.

1. (1.5 pts) Montrer que $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E .
2. (1.5 pts) Soit $\psi \in E^*$. Montrer que $\ker(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$ si et seulement si ψ est proportionnelle à φ .
3. (1.5 pts) Soit $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Montrer que $E = \ker(\varphi) \oplus \text{Vect}(x)$.
4. (1.5 pts) En déduire que tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Exercice 2 (7 points)

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On note $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale.

1. (2 pts) Montrer que pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i^* \rangle e_i$.
2. (2 pts) Montrer que pour tout $\varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^n \langle e_i, \varphi \rangle e_i^*$.
3. (1.5 pts) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = (a_{ij})$ sa matrice dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Montrer que $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i^* \rangle$.
4. (1.5 pts) Montrer que la matrice de ${}^t u$ dans la base duale est ${}^t A$.

Exercice 3 (7 points)

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E .

1. (2 pts) Définir $F^\perp$ et montrer que $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$.
2. (2 pts) Montrer que $(F^\perp)^\circ = F$.
3. (1.5 pts) Montrer que si G est un sous-espace vectoriel de E^* , alors $(G^\circ)^\perp = G$.
4. (1.5 pts) En déduire que l'application $F \mapsto F^\perp$ est une bijection entre les sous-espaces vectoriels de E et ceux de E^* .

Solutions de l'Examen 1

Solution de l'Exercice 1

1. φ est non nulle, donc $\text{Im}(\varphi) \neq \{0\}$. Comme $\text{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de K , on a $\text{Im}(\varphi) = K$. D'après le théorème du rang,

$$\dim(E) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\text{Im}(\varphi)) = \dim(\ker(\varphi)) + 1$$

Donc $\dim(\ker(\varphi)) = n - 1$, donc $\ker(\varphi)$ est un hyperplan.

2. ($\Leftarrow$) Si $\psi = \lambda\varphi$, alors $\ker(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$ car si $\varphi(x) = 0$, alors $\psi(x) = 0$.
 ($\Rightarrow$) Supposons que $\ker(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$. Soit $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. Pour tout $x \in E$, on a

$$x = \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0\right) + \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}x_0$$

Le premier terme est dans $\ker(\varphi)$, donc dans $\ker(\psi)$. Ainsi

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}\psi(x_0)$$

Donc $\psi = \lambda\varphi$ avec $\lambda = \frac{\psi(x_0)}{\varphi(x_0)}$.

3. Soit $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0$. Si $y \in \ker(\varphi) \cap \text{Vect}(x)$, alors $y = \lambda x$ et $\varphi(y) = 0$, donc $\lambda\varphi(x) = 0$. Comme $\varphi(x) \neq 0$, on a $\lambda = 0$, donc $y = 0$. Ainsi $\ker(\varphi) \cap \text{Vect}(x) = \{0\}$.
 Soit $z \in E$. On a

$$z = \left(z - \frac{\varphi(z)}{\varphi(x)}x\right) + \frac{\varphi(z)}{\varphi(x)}x$$

Le premier terme est dans $\ker(\varphi)$ et le second dans $\text{Vect}(x)$. Donc $E = \ker(\varphi) + \text{Vect}(x)$.

4. Soit H un hyperplan de E . Alors $\dim(H) = n - 1$. Soit $x \in E$ tel que $x \notin H$. Alors $E = H \oplus \text{Vect}(x)$. On définit $\varphi : E \rightarrow K$ par $\varphi(h + \lambda x) = \lambda$. Alors φ est une forme linéaire non nulle et $\ker(\varphi) = H$.

Solution de l'Exercice 2

1. Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\langle x, e_j^* \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, e_j^* \rangle = x_j$$

Donc $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i^* \rangle e_i$.

2. Soit $\varphi \in E^*$ et $\varphi = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i^*$. Alors pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\langle e_j, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle e_j, e_i^* \rangle = \alpha_j$$

Donc $\varphi = \sum_{i=1}^n \langle e_i, \varphi \rangle e_i^*$.

3. On a $u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$. Donc

$$\langle u(e_j), e_i^* \rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj} \langle e_k, e_i^* \rangle = a_{ij}$$

4. Soit $B = (b_{ij})$ la matrice de ${}^t u$ dans la base duale. Alors

$$b_{ij} = \langle {}^t u(e_j), e_i^* \rangle$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le crochet de dualité entre E et E^* . Mais ${}^t u(e_j) = e_j^* \circ u$. Donc

$$b_{ij} = (e_j^* \circ u)(e_i) = e_j^*(u(e_i)) = \langle u(e_i), e_j^* \rangle = a_{ji}$$

Donc $B = {}^t A$.

Solution de l'Exercice 3

1. $F^\perp = \{\varphi \in E^* : \forall x \in F, \varphi(x) = 0\}$. On considère $\Phi : E^* \rightarrow F^*, \Phi(\varphi) = \varphi|_F$. Alors $\ker(\Phi) = F^\perp$ et Φ est surjective (théorème de prolongement). Donc

$$\dim(E^*) = \dim(F^\perp) + \dim(F^*)$$

D'où $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$.

2. On a $F \subseteq (F^\perp)^\circ$ car si $x \in F$, alors pour tout $\varphi \in F^\perp$, $\varphi(x) = 0$. Réciproquement, soit $x \in (F^\perp)^\circ$. Si $x \notin F$, alors il existe $\varphi \in F^\perp$ tel que $\varphi(x) = 1$, contradiction. Donc $x \in F$.

3. On a $G \subseteq (G^\circ)^\perp$ car si $\varphi \in G$, alors pour tout $x \in G^\circ$, $\varphi(x) = 0$. Réciproquement, soit $\varphi \in (G^\circ)^\perp$. Si $\varphi \notin G$, alors il existe $x \in G^\circ$ tel que $\varphi(x) = 1$, contradiction. Donc $\varphi \in G$.

4. L'application $F \mapsto F^\perp$ est injective car si $F_1^\perp = F_2^\perp$, alors $F_1 = (F_1^\perp)^\circ = (F_2^\perp)^\circ = F_2$. Elle est surjective car si G est un sous-espace de E^* , alors $G = (G^\circ)^\perp$.

Examen 2

Exercice 1 (6 points)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et soit f une forme n -linéaire alternée sur E .

1. (1.5 pts) Montrer que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors f est déterminée par la valeur $f(e_1, \dots, e_n)$.
2. (1.5 pts) Montrer que si $(x_1, \dots, x_n)$ est lié, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.
3. (1.5 pts) Montrer que $\mathcal{A}_n(E)$ est de dimension 1.
4. (1.5 pts) En déduire que si f est non nulle, alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

Exercice 2 (7 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.

1. (2 pts) Donner la définition du déterminant de A .
2. (2 pts) Montrer que $\det({}^t A) = \det(A)$.
3. (1.5 pts) Montrer que si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
4. (1.5 pts) Montrer que $\text{rg}(A) = n$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Exercice 3 (7 points)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(K)$ et $\text{com}(A)$ sa comatrice.

1. (2 pts) Donner la définition de la comatrice de A .
2. (2 pts) Montrer que $A \text{com}(A)^T = \text{com}(A)^T A = \det(A) I_n$.
3. (1.5 pts) Montrer que si A est inversible, alors $\text{com}(A)$ est inversible et $\text{com}(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A$.
4. (1.5 pts) En déduire que $\det(\text{com}(A)) = \det(A)^{n-1}$.

Solutions de l'Examen 2

Solution de l'Exercice 1

1. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On écrit $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$. Par n -linéarité,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n} a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

Comme f est alternée, $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$ si deux indices sont égaux, et $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = \varepsilon(\sigma)f(e_1, \dots, e_n)$ si $(i_1, \dots, i_n)$ est une permutation σ de $(1, \dots, n)$. Donc

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(e_1, \dots, e_n) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Donc f est déterminée par $f(e_1, \dots, e_n)$.

2. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est lié, alors un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Par n -linéarité et alternance, $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.
3. L'application $\Delta : E^n \rightarrow K$ définie par

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

est une forme n -linéaire alternée non nulle avec $\Delta(e_1, \dots, e_n) = 1$. D'après la question 1, toute forme n -linéaire alternée est un multiple de Δ . Donc $\mathcal{A}_n(E)$ est de dimension 1.

4. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une base, alors $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ car f est non nulle. Réciproquement, si $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$, alors $(x_1, \dots, x_n)$ ne peut pas être lié (sinon f serait nulle). Comme il y a n vecteurs dans un espace de dimension n , ils forment une base.

Solution de l'Exercice 2

1. Pour $A = (a_{ij})$, on définit

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

2. On a

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

En posant $\tau = \sigma^{-1}$, on obtient

$$\det({}^t A) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\tau) a_{\tau(1),1} \cdots a_{\tau(n),n} = \det(A)$$

3. De $AA^{-1} = I_n$, on tire $\det(A) \det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. Donc $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

4. A est inversible si et seulement si l'endomorphisme canoniquement associé est inversible, ce qui équivaut à $\det(A) \neq 0$. Comme $\text{rg}(A) = n$ si et seulement si A est inversible, on a le résultat.

Solution de l'Exercice 3

1. $\text{com}(A) = ((-1)^{i+j} \Delta_{ij})$ où Δ_{ij} est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne.
2. Soit $C = \text{com}(A)^T$. Le coefficient (i, j) de AC est

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (-1)^{k+j} \Delta_{jk}$$

Si $i = j$, c'est le développement de $\det(A)$ suivant la i -ème ligne. Si $i \neq j$, c'est le développement du déterminant de la matrice obtenue en remplaçant la j -ème ligne par la i -ème ligne, qui est nul. Donc $AC = \det(A)I_n$.

3. Si A est inversible, $\det(A) \neq 0$. D'après la question précédente,

$$\text{com}(A)^T \left(\frac{1}{\det(A)} A \right) = I_n$$

Donc $\text{com}(A)$ est inversible et $\text{com}(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A$.

4. En prenant le déterminant de $\text{com}(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A$, on obtient

$$\frac{1}{\det(\text{com}(A))} = \frac{1}{\det(A)^n} \det(A) = \frac{1}{\det(A)^{n-1}}$$

Donc $\det(\text{com}(A)) = \det(A)^{n-1}$.

Examen 3

Exercice 1 (6 points)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. (2 pts) Montrer que $\text{Im}({}^t u) = (\ker(u))^\perp$.
2. (2 pts) Montrer que $\ker({}^t u) = (\text{Im}(u))^\perp$.
3. (2 pts) En déduire que $\text{rg}({}^t u) = \text{rg}(u)$.

Exercice 2 (7 points)

Calculer les déterminants suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (7 points)

Soit $V(a_1, \dots, a_n)$ le déterminant de Vandermonde.

1. (2 pts) Donner la définition de $V(a_1, \dots, a_n)$.
2. (2 pts) Montrer que $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.
3. (1.5 pts) En déduire que $V(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ si et seulement si les a_i sont deux à deux distincts.
4. (1.5 pts) Application : résoudre dans $\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 0 \end{cases}$$

Solutions de l'Examen 3

Solution de l'Exercice 1

1. Soit $\varphi \in \text{Im}(^t u)$. Alors il existe $\psi \in E^*$ tel que $\varphi = \psi \circ u$. Pour $x \in \ker(u)$, $\varphi(x) = \psi(u(x)) = 0$. Donc $\varphi \in (\ker(u))^\perp$.
Réciproquement, soit $\varphi \in (\ker(u))^\perp$. On définit ψ sur $\text{Im}(u)$ par $\psi(u(x)) = \varphi(x)$. Cette définition est cohérente car si $u(x) = u(y)$, alors $x - y \in \ker(u)$, donc $\varphi(x) = \varphi(y)$. On prolonge ψ à E tout entier. Alors $\varphi = \psi \circ u = ^t u(\psi)$.
2. Soit $\varphi \in \ker(^t u)$. Alors $^t u(\varphi) = 0$, donc $\varphi \circ u = 0$. Pour tout $x \in E$, $\varphi(u(x)) = 0$, donc φ s'annule sur $\text{Im}(u)$. Ainsi $\varphi \in (\text{Im}(u))^\perp$.
Réciproquement, si $\varphi \in (\text{Im}(u))^\perp$, alors pour tout $x \in E$, $\varphi(u(x)) = 0$, donc $\varphi \circ u = 0$. Ainsi $^t u(\varphi) = 0$.
3. On a $\text{rg}(^t u) = \dim(\text{Im}(^t u)) = \dim((\ker(u))^\perp) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = \text{rg}(u)$.

Solution de l'Exercice 2

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 7L_1$, on obtient

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = 0$$

car les deux dernières lignes sont proportionnelles.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = V(1, 2, 3) = (2-1)(3-1)(3-2) = 2$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

En développant,

$$\det(C) = a(cb - a^2) - b(b^2 - ac) + c(ab - c^2) = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

Solution de l'Exercice 3

$$1. V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

2. Voir la démonstration par récurrence classique.

3. $V(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ si et seulement si tous les facteurs $(a_j - a_i)$ sont non nuls, c'est-à-dire si les a_i sont deux à deux distincts.

4. Le système
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 0 \end{cases}$$
 a pour déterminant de Vandermonde $V(x, y, z) = (y-x)(z-x)(z-y) \neq 0$ si x, y, z sont distincts. La solution est donc $x = y = z = 0$.