

Examens: Espaces Vectoriels - Applications Linéaires et Matrices

Examens avec solutions détaillées

Durée: 2 heures

Examen 1

Exercice 1 (6 points)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur, c'est-à-dire $u^2 = u$.

1. (1.5 pts) Montrer que $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.
2. (1.5 pts) Montrer que $\ker(u) = \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - u)$ et $\operatorname{Im}(u) = \ker(\operatorname{Id}_E - u)$.
3. (1.5 pts) En déduire que $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{tr}(u)$.
4. (1.5 pts) Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 2 (7 points)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. (2 pts) Montrer que $\ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \dots \subseteq \ker(f^k) \subseteq \dots$ et que $\operatorname{Im}(f) \supseteq \operatorname{Im}(f^2) \supseteq \dots \supseteq \operatorname{Im}(f^k) \supseteq \dots$.
2. (2 pts) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$.
3. (1.5 pts) Montrer que si $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$, alors $\ker(f^p) = \ker(f^{p+k})$ pour tout $k \geq 1$.
4. (1.5 pts) Montrer que si $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$, alors $\operatorname{Im}(f^p) = \operatorname{Im}(f^{p+1})$.

Exercice 3 (7 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

1. (2 pts) Montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles.
2. (2 pts) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
3. (1.5 pts) Montrer que si $A^2 = 0$, alors $A = 0$.
4. (1.5 pts) Montrer que si $A^2 = A$, alors A est une matrice de projection orthogonale.

Solutions de l'Examen 1

Solution de l'Exercice 1

1. Soit $x \in \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$ et $u(x) = 0$. Comme $u^2 = u$, on a $u(x) = u^2(y) = u(y) = x$. Donc $x = 0$. Ainsi $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$.

Soit $x \in E$. On a $x = u(x) + (x - u(x))$. On a $u(x) \in \operatorname{Im}(u)$ et $u(x - u(x)) = u(x) - u^2(x) = u(x) - u(x) = 0$, donc $x - u(x) \in \ker(u)$. Ainsi $E = \ker(u) + \operatorname{Im}(u)$.

Par conséquent, $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

2. Soit $x \in \ker(u)$. Alors $x = x - u(x) = (\operatorname{Id}_E - u)(x) \in \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - u)$. Donc $\ker(u) \subseteq \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - u)$.

Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - u)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = y - u(y)$. On a $u(x) = u(y) - u^2(y) = u(y) - u(y) = 0$, donc $x \in \ker(u)$. Ainsi $\operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - u) \subseteq \ker(u)$.

Donc $\ker(u) = \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - u)$.

De même, soit $x \in \operatorname{Im}(u)$. Alors il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$. On a $(\operatorname{Id}_E - u)(x) = u(y) - u^2(y) = u(y) - u(y) = 0$, donc $x \in \ker(\operatorname{Id}_E - u)$. Donc $\operatorname{Im}(u) \subseteq \ker(\operatorname{Id}_E - u)$.

Réciproquement, soit $x \in \ker(\operatorname{Id}_E - u)$. Alors $u(x) = x$, donc $x \in \operatorname{Im}(u)$. Ainsi $\ker(\operatorname{Id}_E - u) \subseteq \operatorname{Im}(u)$.

Donc $\operatorname{Im}(u) = \ker(\operatorname{Id}_E - u)$.

3. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\operatorname{Im}(u)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de $\ker(u)$. Dans cette base, la matrice de u est

$$A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{tr}(u) = p = \dim(\operatorname{Im}(u)) = \operatorname{rg}(u)$.

4. D'après la question 1, $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$. Donc il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale avec des 1 sur la diagonale pour les éléments de $\operatorname{Im}(u)$ et des 0 pour les éléments de $\ker(u)$. Donc u est diagonalisable.

Solution de l'Exercice 2

1. Soit $x \in \ker(f^k)$. Alors $f^k(x) = 0$, donc $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$, donc $x \in \ker(f^{k+1})$. Ainsi $\ker(f^k) \subseteq \ker(f^{k+1})$.

Soit $y \in \operatorname{Im}(f^{k+1})$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) \in \operatorname{Im}(f^k)$. Donc $\operatorname{Im}(f^{k+1}) \subseteq \operatorname{Im}(f^k)$.

2. On a une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E :

$$\ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \dots \subseteq \ker(f^k) \subseteq \dots$$

Comme E est de dimension finie n , cette suite est stationnaire. Donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+1})$.

3. Soit $k \geq 1$. On procède par récurrence sur k . Pour $k = 1$, c'est l'hypothèse. Supposons que $\ker(f^p) = \ker(f^{p+k})$. Soit $x \in \ker(f^{p+k+1})$. Alors $f^{p+k+1}(x) = 0$, donc $f^{p+k}(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in \ker(f^{p+k}) = \ker(f^p)$. Ainsi $f^{p+1}(x) = f^p(f(x)) = 0$, donc $x \in \ker(f^{p+1}) = \ker(f^p)$. Donc $\ker(f^{p+k+1}) \subseteq \ker(f^p)$, et comme $\ker(f^p) \subseteq \ker(f^{p+k+1})$, on a l'égalité.
4. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\operatorname{Im}(f^p)) = n - \dim(\ker(f^p)) = n - \dim(\ker(f^{p+1})) = \dim(\operatorname{Im}(f^{p+1}))$$

Comme $\operatorname{Im}(f^{p+1}) \subseteq \operatorname{Im}(f^p)$ et qu'ils ont même dimension, on a $\operatorname{Im}(f^p) = \operatorname{Im}(f^{p+1})$.

Solution de l'Exercice 3

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et soit $x \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé, avec $x \neq 0$. Alors $Ax = \lambda x$.

$$\text{On a } \bar{x}^T Ax = \bar{x}^T (\lambda x) = \lambda \bar{x}^T x.$$

D'autre part, comme A est réelle symétrique, $A^T = A$ et $\bar{A} = A$, donc $A^* = A$. On a

$$\bar{x}^T Ax = (A^T \bar{x})^T x = (A \bar{x})^T x = \bar{\lambda} \bar{x}^T x$$

Donc $\lambda \bar{x}^T x = \bar{\lambda} \bar{x}^T x$, d'où $(\lambda - \bar{\lambda}) \bar{x}^T x = 0$. Comme $x \neq 0$, on a $\bar{x}^T x = \|x\|^2 > 0$, donc $\lambda = \bar{\lambda}$, c'est-à-dire $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. D'après le théorème spectral, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On a

$$0 = \langle A^2 x, x \rangle = \langle A(Ax), x \rangle = \langle Ax, A^T x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2$$

car A est symétrique donc $A^T = A$. Ainsi $\|Ax\|^2 = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, donc $Ax = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, d'où $A = 0$.

4. Si $A^2 = A$, alors A est un projecteur. De plus, comme A est symétrique, on a $A^T = A$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^T Ax, x \rangle = \langle A^2 x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle \leq \|Ax\| \|x\|$$

donc $\|Ax\| \leq \|x\|$. D'après le cours, un projecteur symétrique est une projection orthogonale.

Examen 2

Exercice 1 (6 points)

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$.

1. (1.5 pts) Montrer que u est diagonalisable.
2. (1.5 pts) Quelles sont les valeurs propres possibles de u ?
3. (1.5 pts) Montrer que $E = \ker(u) \oplus \ker(u - \text{Id}_E) \oplus \ker(u + \text{Id}_E)$.
4. (1.5 pts) Si $\text{tr}(u) = 2$ et $\dim(E) = 4$, déterminer les dimensions des sous-espaces propres.

Exercice 2 (7 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.

1. (1.5 pts) Montrer que A et A^T ont les mêmes valeurs propres.
2. (2 pts) Montrer que si A est diagonalisable, alors A^T est diagonalisable.
3. (2 pts) Montrer que si A est symétrique, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
4. (1.5 pts) Montrer que si A est antisymétrique, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont imaginaires pures.

Exercice 3 (7 points)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. (2 pts) Montrer que si u est inversible, alors $\text{rg}(u) = n$.
2. (2 pts) Montrer que $\text{rg}(u^2) \leq \text{rg}(u)$.
3. (1.5 pts) Montrer que si $\text{rg}(u^2) = \text{rg}(u)$, alors $\text{Im}(u^2) = \text{Im}(u)$ et $\ker(u^2) = \ker(u)$.
4. (1.5 pts) En déduire que $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Solutions de l'Examen 2

Solution de l'Exercice 1

1. On a $u^3 - u = 0$, donc le polynôme $P(X) = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ annule u . Comme P a des racines simples $(0, 1, -1)$, u est diagonalisable.
2. Les valeurs propres possibles de u sont les racines de P , donc $0, 1, -1$.
3. D'après le théorème de décomposition des noyaux, comme $X, X-1, X+1$ sont premiers entre eux deux à deux, on a

$$E = \ker(u) \oplus \ker(u - \text{Id}_E) \oplus \ker(u + \text{Id}_E)$$

4. Soient $p = \dim(\ker(u))$, $q = \dim(\ker(u - \text{Id}_E))$ et $r = \dim(\ker(u + \text{Id}_E))$. On a $p + q + r = 4$ et $\text{tr}(u) = q - r = 2$. Donc $q = r + 2$. On a $p + (r + 2) + r = 4$, donc $p + 2r = 2$. Les solutions entières sont $r = 0, p = 2, q = 2$ ou $r = 1, p = 0, q = 3$.

Donc deux cas possibles :

- $\dim(\ker(u)) = 2, \dim(\ker(u - \text{Id}_E)) = 2, \dim(\ker(u + \text{Id}_E)) = 0$.
- $\dim(\ker(u)) = 0, \dim(\ker(u - \text{Id}_E)) = 3, \dim(\ker(u + \text{Id}_E)) = 1$.

Solution de l'Exercice 2

1. On a $\chi_{A^T}(X) = \det(XI - A^T) = \det((XI - A)^T) = \det(XI - A) = \chi_A(X)$. Donc A et A^T ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres.
2. Si A est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Alors $A^T = (P^{-1})^T D^T P^T = (P^T)^{-1} D P^T$. Donc A^T est diagonalisable.
3. D'après le théorème spectral, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
4. Si A est antisymétrique, alors $A^T = -A$. Donc $A^* = \overline{A}^T = -\overline{A}$. Mais comme A est réelle, $\overline{A} = A$, donc $A^* = -A$. Ainsi $A^*A = -A^2 = AA^*$, donc A est normale. Par le théorème spectral pour les matrices normales, A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Soit λ une valeur propre de A et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $Ax = \lambda x$. On a

$$\lambda \|x\|^2 = \langle Ax, x \rangle = \langle x, -A^T x \rangle = -\langle x, Ax \rangle = -\overline{\lambda} \|x\|^2$$

Donc $\lambda = -\overline{\lambda}$, ce qui équivaut à $\text{Re}(\lambda) = 0$. Donc λ est imaginaire pur.

Solution de l'Exercice 3

1. Si u est inversible, alors $\ker(u) = \{0\}$. Donc $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)) = n - \dim(\ker(u)) = n$.
2. On a $\text{Im}(u^2) = u(\text{Im}(u)) \subseteq \text{Im}(u)$. Donc $\dim(\text{Im}(u^2)) \leq \dim(\text{Im}(u))$, c'est-à-dire $\text{rg}(u^2) \leq \text{rg}(u)$.

3. Si $\text{rg}(u^2) = \text{rg}(u)$, alors $\dim(\text{Im}(u^2)) = \dim(\text{Im}(u))$. Comme $\text{Im}(u^2) \subseteq \text{Im}(u)$, on a $\text{Im}(u^2) = \text{Im}(u)$.

D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(u^2)) = n - \text{rg}(u^2) = n - \text{rg}(u) = \dim(\ker(u))$. Comme $\ker(u) \subseteq \ker(u^2)$, on a $\ker(u^2) = \ker(u)$.

4. Soit $x \in \ker(u) \cap \text{Im}(u)$. Alors $x \in \text{Im}(u) = \text{Im}(u^2)$, donc il existe $y \in E$ tel que $x = u^2(y)$. On a $u(x) = u^3(y)$. Comme $x \in \ker(u)$, on a $u(x) = 0$, donc $u^3(y) = 0$. Ainsi $u(y) \in \ker(u^2) = \ker(u)$, donc $u^2(y) = 0$, d'où $x = 0$. Donc $\ker(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}$.

Soit $x \in E$. On a $x = u(x) + (x - u(x))$ avec $u(x) \in \text{Im}(u)$ et $x - u(x) \in \ker(u)$ car $u(x - u(x)) = u(x) - u^2(x) = u(x) - u(x) = 0$. Donc $E = \ker(u) + \text{Im}(u)$.

Par conséquent, $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$.