

Examens: Formes Bilinéaires - Espaces Euclidiens - Hermitiens

Examens avec solutions détaillées

Durée: 2 heures

Examen 1

Exercice 1 (6 points)

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 4xz + 6yz$$

1. (1.5 pts) Déterminer la matrice de q dans la base canonique.
2. (1.5 pts) Appliquer la méthode de Gauss pour décomposer q en somme de carrés.
3. (1.5 pts) Déterminer le rang et la signature de q .
4. (1.5 pts) Trouver une base q -orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 (7 points)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

1. (2 pts) Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$. Déterminer la projection orthogonale sur P .
2. (2 pts) Déterminer la symétrie orthogonale par rapport à P .
3. (1.5 pts) Calculer la distance du point $A = (1, 2, 3)$ au plan P .
4. (1.5 pts) Déterminer le point de P le plus proche de A .

Exercice 3 (7 points)

Soit $E = \mathbb{C}^2$ muni du produit hermitien usuel.

1. (2 pts) Déterminer la matrice de l'endomorphisme u défini par $u(x, y) = (ix + y, -x + iy)$ dans la base canonique.
2. (2 pts) Montrer que u est un endomorphisme unitaire.
3. (1.5 pts) Déterminer les valeurs propres de u .
4. (1.5 pts) Trouver une base orthonormale de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de u .

Solutions de l'Examen 1

Solution de l'Exercice 1

1. La matrice de q dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2. On a

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= x^2 + 2xy + 4xz + 2y^2 + 6yz + 3z^2 \\ &= (x + y + 2z)^2 - y^2 - 4z^2 - 4yz + 2y^2 + 6yz + 3z^2 \\ &= (x + y + 2z)^2 + y^2 + 2yz - z^2 \\ &= (x + y + 2z)^2 + (y + z)^2 - 2z^2 \end{aligned}$$

3. On a $q(x, y, z) = X^2 + Y^2 - 2Z^2$ avec $X = x + y + 2z$, $Y = y + z$, $Z = z$. Donc $\text{rg}(q) = 3$ et la signature est $(2, 1)$.

4. On pose

$$\begin{cases} X = x + y + 2z \\ Y = y + z \\ Z = z \end{cases} \implies \begin{cases} x = X - Y - Z \\ y = Y - Z \\ z = Z \end{cases}$$

Donc une base q -orthogonale est donnée par les vecteurs colonnes de la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (-1, 1, 0)$, $v_3 = (-1, -1, 1)$.

Solution de l'Exercice 2

1. Le vecteur normal à P est $n = (1, 1, 1)$. La projection orthogonale sur P est

$$p(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{x + y + z}{3}(1, 1, 1)$$

Donc

$$p(x, y, z) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right)$$

2. La symétrie orthogonale par rapport à P est $s = 2p - \text{Id}$. Donc

$$\begin{aligned} s(x, y, z) &= (x, y, z) - 2\frac{x + y + z}{3}(1, 1, 1) \\ s(x, y, z) &= \left(\frac{x - 2y - 2z}{3}, \frac{-2x + y - 2z}{3}, \frac{-2x - 2y + z}{3} \right) \end{aligned}$$

3. La distance de $A = (1, 2, 3)$ à P est

$$d(A, P) = \frac{|1 + 2 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

4. Le point de P le plus proche de A est $p(A)$:

$$p(1, 2, 3) = (1, 2, 3) - \frac{6}{3}(1, 1, 1) = (1, 2, 3) - (2, 2, 2) = (-1, 0, 1)$$

Solution de l'Exercice 3

1. La matrice de u dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

2. On a $A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$. Alors

$$A^*A = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc A est unitaire, donc u est unitaire.

3. Le polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - i & -1 \\ 1 & \lambda - i \end{vmatrix} = (\lambda - i)^2 + 1 = \lambda^2 - 2i\lambda - 1 + 1 = \lambda(\lambda - 2i)$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2i$.

4. Pour $\lambda_1 = 0$: $(A - 0I)v = 0 \implies \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \implies ix + y = 0$, donc $v_1 = (1, -i)$.

Pour $\lambda_2 = 2i$: $(A - 2iI)v = 0 \implies \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \implies -ix + y = 0$, donc $v_2 = (1, i)$.

On normalise : $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)$.

Examen 2

Exercice 1 (6 points)

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz$$

1. (2 pts) Déterminer la matrice de q .
2. (2 pts) Déterminer le rang et la signature de q .
3. (2 pts) Déterminer le cône isotrope de q .

Exercice 2 (7 points)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. On considère la base $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1)$.

1. (2 pts) Appliquer le procédé de Gram-Schmidt à cette base.
2. (2 pts) Déterminer la matrice de passage de la base canonique à la base orthonormale obtenue.
3. (1.5 pts) Vérifier que cette matrice est orthogonale.
4. (1.5 pts) Calculer le déterminant de cette matrice.

Exercice 3 (7 points)

Soit E un espace hermitien de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal.

1. (2 pts) Rappeler la définition d'un endomorphisme normal.
2. (2 pts) Montrer que $\ker(u) = \ker(u^*)$.
3. (1.5 pts) Montrer que $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^*)$.
4. (1.5 pts) En déduire que $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

Solutions de l'Examen 2

Solution de l'Exercice 1

1. La matrice de q est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. On a $q(x, y, z) = (x + y - z)^2$. Donc $\text{rg}(q) = 1$ et la signature est $(1, 0)$.
 3. Le cône isotrope est $\ker(q) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$, c'est un plan vectoriel.

Solution de l'Exercice 2

1. On a

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

$$w_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = (1, 0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3/2}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$$

$$w_3 = v_3 - \langle v_3, e_1 \rangle e_1 - \langle v_3, e_2 \rangle e_2 = (0, 1, 1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) - \frac{1}{6}(1, -1, 2) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-2, 1, 2)$$

2. La matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, e_3) est

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

3. P est orthogonale car ses colonnes sont les vecteurs e_1, e_2, e_3 qui forment une base orthonormale.
 4. $\det(P) = \pm 1$ car P est orthogonale. On a $\det(P) = 1$ car les vecteurs forment une base directe (le déterminant est positif).

Solution de l'Exercice 3

1. Un endomorphisme u est normal si $u^*u = uu^*$.
 2. Soit $x \in \ker(u)$. Alors $u(x) = 0$. On a

$$\|u^*(x)\|^2 = \langle u^*(x), u^*(x) \rangle = \langle uu^*(x), x \rangle = \langle u^*u(x), x \rangle = 0$$

Donc $u^*(x) = 0$, donc $x \in \ker(u^*)$. Réciproquement, si $x \in \ker(u^*)$, alors $u^*(x) = 0$, donc

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = \langle u^*u(x), x \rangle = \langle uu^*(x), x \rangle = 0$$

Donc $u(x) = 0$, donc $x \in \ker(u)$. Ainsi $\ker(u) = \ker(u^*)$.

3. On a $\text{Im}(u) = \ker(u^*)^\perp = \ker(u)^\perp = \text{Im}(u^*)$.
4. On sait que $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u^*)$ car $\text{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$. Comme $\text{Im}(u) = \text{Im}(u^*)$, on a $E = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$.

Examen 3

Exercice 1 (6 points)

Soit h la forme hermitienne sur $\mathbb{C}^2$ définie par

$$h((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1\overline{y_1} + 3x_1\overline{y_2} + 3x_2\overline{y_1} + 5x_2\overline{y_2}$$

1. (2 pts) Déterminer la matrice de h dans la base canonique.
2. (2 pts) Montrer que h est définie positive.
3. (2 pts) Déterminer la forme quadratique hermitienne associée.

Exercice 2 (7 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$.

1. (2 pts) Montrer que A est hermitienne.
2. (2 pts) Déterminer les valeurs propres de A .
3. (1.5 pts) Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{C}^2$ formée de vecteurs propres de A .
4. (1.5 pts) En déduire que A est diagonalisable par une matrice unitaire.

Exercice 3 (7 points)

Résoudre le système différentiel suivant dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x'_1 = 2x_1 + x_2 \\ x'_2 = x_1 + 2x_2 \end{cases}$$

1. (2 pts) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice du système.
2. (2 pts) Donner la solution générale.
3. (1.5 pts) Déterminer la solution vérifiant $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = -1$.
4. (1.5 pts) Calculer $\exp(tA)$.

Solutions de l'Examen 3

Solution de l'Exercice 1

1. La matrice de h est $H = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Les mineurs principaux sont $2 > 0$ et $\det(H) = 10 - 9 = 1 > 0$. Donc H est définie positive par le critère de Sylvester.
3. La forme quadratique hermitienne associée est

$$q(x_1, x_2) = h((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 2|x_1|^2 + 3x_1\overline{x_2} + 3x_2\overline{x_1} + 5|x_2|^2$$

Solution de l'Exercice 2

1. $A^* = \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} = A$. Donc A est hermitienne.
2. $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -i \\ i & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 1 = \lambda^2 - 3\lambda + 1$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
3. Pour $\lambda_1 : v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 2 \\ i \end{pmatrix}$. Pour $\lambda_2 : v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 - 2 \\ i \end{pmatrix}$. On normalise ces vecteurs.
4. $A = UDU^*$ où U est la matrice unitaire dont les colonnes sont les vecteurs propres normalisés et $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Solution de l'Exercice 3

1. La matrice est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 3$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\lambda_2 = 1$ avec $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. La solution générale est

$$X(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Avec $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - C_2 = -1 \end{cases}$, donc $C_1 = 0$ et $C_2 = 1$. La solution est

$$X(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. $\exp(tA) = P \exp(tD) P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$\exp(tA) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{3t} + e^t & e^{3t} - e^t \\ e^{3t} - e^t & e^{3t} + e^t \end{pmatrix}$$