

Examens: Réduction des Endomorphismes - Applications

Examens avec solutions détaillées

Durée: 2 heures

Examen 1

Exercice 1 (6 points)

Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie n et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. (1.5 pts) Définir le polynôme minimal M_u de u .
2. (1.5 pts) Montrer que si $P \in K[X]$ vérifie $P(u) = 0$, alors M_u divise P .
3. (1.5 pts) Montrer que M_u et χ_u ont les mêmes racines.
4. (1.5 pts) En déduire que u est diagonalisable si et seulement si M_u est scindé à racines simples.

Exercice 2 (7 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. (2 pts) Calculer le polynôme caractéristique de A .
2. (2 pts) Déterminer les sous-espaces propres de A .
3. (1.5 pts) A est-elle diagonalisable ? Justifier.
4. (1.5 pts) Déterminer la forme de Jordan de A .

Exercice 3 (7 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable.

1. (2 pts) Montrer que $\exp(A)$ est diagonalisable.
2. (2 pts) Montrer que $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)}$.
3. (1.5 pts) Montrer que si $\exp(A) = I_n$, alors A est diagonalisable et ses valeurs propres sont dans $2i\pi\mathbb{Z}$.
4. (1.5 pts) En déduire l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\exp(A) = I_n$.

Solutions de l'Examen 1

Solution de l'Exercice 1

1. Le polynôme minimal M_u de u est l'unique polynôme unitaire de plus petit degré tel que $M_u(u) = 0$. Il est caractérisé par : $M_u(u) = 0$ et pour tout $P \in K[X]$, $P(u) = 0 \Rightarrow M_u$ divise P .
2. Soit $P \in K[X]$ tel que $P(u) = 0$. On effectue la division euclidienne de P par M_u : $P = QM_u + R$ avec $\deg(R) < \deg(M_u)$. En évaluant en u , on obtient $R(u) = 0$. Par minimalité de M_u , on a $R = 0$. Donc M_u divise P .
3. Si λ est une racine de M_u , alors $M_u(\lambda) = 0$, donc λ est valeur propre de u . Réciproquement, si λ est valeur propre de u , alors il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. Pour tout $P \in K[X]$, $P(u)(x) = P(\lambda)x$. En particulier, $M_u(u)(x) = M_u(\lambda)x = 0$, donc $M_u(\lambda) = 0$. Ainsi M_u et χ_u ont les mêmes racines.
4. ($\Rightarrow$) Si u est diagonalisable, alors u est semblable à une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Le polynôme $Q(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$ où λ_i sont les valeurs propres distinctes annule u . Donc M_u divise Q , donc M_u est scindé à racines simples.
($\Leftarrow$) Si M_u est scindé à racines simples, $M_u(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)$. D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$E = \ker(M_u(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \ker(u - \lambda_i \text{Id}_E)$$

Donc E est somme directe des sous-espaces propres de u , donc u est diagonalisable.

Solution de l'Exercice 2

1. On a

$$\chi_A(X) = \det(XI - A) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & 0 \\ 0 & X-2 & -1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2)^2$$

2. Pour $\lambda = 1$: $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $\ker(A - I) = \text{Vect}(e_1)$.

$$\text{Pour } \lambda = 2 : A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ donc } \ker(A - 2I) = \text{Vect}(e_2).$$

3. A n'est pas diagonalisable car $\dim(\ker(A - 2I)) = 1 < 2$, la multiplicité de la valeur propre 2.
4. La forme de Jordan de A est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

qui est la matrice elle-même car elle est déjà sous forme de Jordan.

Solution de l'Exercice 3

1. Si A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors

$$\exp(A) = P \exp(D) P^{-1} = P \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}) P^{-1}$$

Donc $\exp(A)$ est diagonalisable.

2. On a $\det(\exp(A)) = \det(P \exp(D) P^{-1}) = \det(\exp(D)) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = e^{\sum \lambda_i} = e^{\text{tr}(A)}$.
3. Si $\exp(A) = I_n$, alors les valeurs propres de $\exp(A)$ sont toutes égales à 1. Donc $e^{\lambda_i} = 1$ pour tout i , ce qui donne $\lambda_i \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Comme A est diagonalisable, $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
4. L'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\exp(A) = I_n$ est

$$\{PDP^{-1} : P \in GL_n(\mathbb{C}), D = \text{diag}(2i\pi k_1, \dots, 2i\pi k_n), k_i \in \mathbb{Z}\}$$

C'est-à-dire les matrices diagonalisables dont les valeurs propres sont dans $2i\pi\mathbb{Z}$.

Examen 2

Exercice 1 (6 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

1. (2 pts) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. (2 pts) Montrer que les valeurs propres de A sont réelles.
3. (2 pts) Montrer que si $A^2 = A$, alors A est une matrice de projection orthogonale.

Exercice 2 (7 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. (2 pts) Déterminer le polynôme caractéristique de A .
2. (2 pts) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
3. (1.5 pts) Trouver une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^T$.
4. (1.5 pts) Calculer $\exp(A)$.

Exercice 3 (7 points)

Résoudre le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 \\ x'_2 = 2x_1 + x_2 \end{cases}$$

1. (2 pts) Écrire le système sous forme matricielle.
2. (2 pts) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice du système.
3. (1.5 pts) Donner la solution générale du système.
4. (1.5 pts) Déterminer la solution vérifiant $x_1(0) = 1$ et $x_2(0) = 0$.

Solutions de l'Examen 2

Solution de l'Exercice 1

1. D'après le théorème spectral, toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $x \neq 0$ un vecteur propre associé. Alors $Ax = \lambda x$. On a

$$\lambda \|x\|^2 = \langle Ax, x \rangle = \langle x, A^T x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \bar{\lambda} \|x\|^2$$

Donc $\lambda = \bar{\lambda}$, c'est-à-dire $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Si $A^2 = A$, alors A est un projecteur. Comme A est symétrique, $A^T = A$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^T Ax, x \rangle = \langle A^2 x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle \leq \|Ax\| \|x\|$$

Donc $\|Ax\| \leq \|x\|$. Un projecteur symétrique est une projection orthogonale.

Solution de l'Exercice 2

1.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-2 & 1 & 0 \\ 1 & X-2 & 1 \\ 0 & 1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-2)^3 - 2(X-2) = (X-2)((X-2)^2 - 2)$$

Donc $\chi_A(X) = (X-2)(X-2-\sqrt{2})(X-2+\sqrt{2})$.

2. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$, $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$.

Pour $\lambda_1 = 2$: $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $E_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

Pour $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}$: $E_{2+\sqrt{2}} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Pour $\lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$: $E_{2-\sqrt{2}} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

3. On normalise les vecteurs propres :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors $P = (v_1, v_2, v_3)$ est orthogonale et $A = PDP^T$ avec $D = \text{diag}(2, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$.

4. $\exp(A) = P \exp(D) P^T$ avec $\exp(D) = \text{diag}(e^2, e^{2+\sqrt{2}}, e^{2-\sqrt{2}})$.

Solution de l'Exercice 3

1. Le système s'écrit $X'(t) = AX(t)$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 3$ avec $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\lambda_2 = -1$ avec $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. La solution générale est

$$X(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Avec $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - C_2 = 0 \end{cases}$, donc $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$. La solution est

$$X(t) = \frac{1}{2} e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Examen 3

Exercice 1 (6 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice.

1. (2 pts) Définir le polynôme caractéristique de A .
2. (2 pts) Montrer que A et A^T ont le même polynôme caractéristique.
3. (2 pts) Montrer que A est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A .

Exercice 2 (7 points)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. (2 pts) Calculer le polynôme caractéristique de A .
2. (2 pts) Déterminer les valeurs propres de A .
3. (1.5 pts) A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? Justifier.
4. (1.5 pts) A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? Justifier.

Exercice 3 (7 points)

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$.

1. (2 pts) Écrire l'équation caractéristique et déterminer ses racines.
2. (2 pts) Donner la solution générale complexe.
3. (1.5 pts) Donner la solution générale réelle.
4. (1.5 pts) Déterminer la solution vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Solutions de l'Examen 3

Solution de l'Exercice 1

1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = \det(XI - A)$.
2. On a

$$\chi_{A^T}(X) = \det(XI - A^T) = \det((XI - A)^T) = \det(XI - A) = \chi_A(X)$$

3. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ si et seulement si $\chi_A(0) \neq 0$ si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A .

Solution de l'Exercice 2

- 1.

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 1 & 1 & X+1 \end{vmatrix} = X^2(X+1) + X + 1 = (X+1)(X^2+1)$$

2. Les valeurs propres complexes sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$.
3. A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ car le polynôme caractéristique $X^3 + X^2 + X + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (il a des racines complexes non réelles).
4. A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ car le polynôme caractéristique est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ ($-1, i, -i$ sont distincts).

Solution de l'Exercice 3

1. L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 2 = 0$. Les racines sont $r = -1 \pm i$.
2. La solution générale complexe est

$$y(t) = C_1 e^{(-1+i)t} + C_2 e^{(-1-i)t}$$

3. La solution générale réelle est

$$y(t) = e^{-t}(A \cos t + B \sin t)$$

4. Avec $y(0) = 1$, on a $A = 1$. $y'(t) = e^{-t}(-A \cos t - B \sin t - A \sin t + B \cos t) = e^{-t}((B - A) \cos t - (A + B) \sin t)$. Donc $y'(0) = B - A = B - 1 = 0$, donc $B = 1$. La solution est

$$y(t) = e^{-t}(\cos t + \sin t)$$