

Chapter 1

Examen Normal

Exercice 1.1. (3 points)

1. Donner la définition de deux suites adjacentes.
2. Énoncer le théorème de Rolle, en donnant précisément les hypothèses et la conclusion.

Solution :

1. **Définition :** Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si :

- (u_n) est croissante.
- (v_n) est décroissante.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$. <https://keepmath.com>

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.

2. **Théorème de Rolle :** Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

Conclusion : Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 1.2. (5 points) Soit $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

1. En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \frac{3x}{(1+x)^{\frac{2}{3}}} < \ln f(x) < \frac{3x}{2}.$$

2. Donner le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
3. Dédurre la limite de :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - e^x + \frac{2}{3}x}{x^2}.$$

Solution :

1. $f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$.

Posons $g(t) = \ln(1+t)$. g est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$.

D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$g'(c) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Or $g'(t) = \frac{1}{1+t}$. Donc $\exists c \in]0, x[$ tel que $\frac{1}{1+c} = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

On a $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+c} < 1$, donc $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

Puisque $f(x) = (1+x)^{1/3}$, $\ln f(x) = \frac{1}{3} \ln(1+x)$.

D'où :

$$\boxed{\frac{x}{3(1+x)} < \ln(\sqrt[3]{1+x}) < \frac{x}{3}}.$$

2. Développement limité de $\sqrt[3]{1+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 :

$$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2).$$

3. Calcul de la limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - e^x + \frac{2}{3}x}{x^2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1+x} &= 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o(x^2), \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[3]{1+x} - e^x + \frac{2}{3}x}{x^2} &= \frac{\left(1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + \frac{2}{3}x + o(x^2)}{x^2} \\ &= \frac{\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}x - x\right) - \frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{9} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{9} - \frac{1}{2} = -\frac{11}{18}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - e^x + \frac{2}{3}x}{x^2} = -\frac{11}{18}}.$$

Exercice 1.3. (13 points) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{x^2+3}$.

1. Donner le domaine de définition de f et montrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f''(x) < 0.$$

2. En déduire que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \frac{2}{9} \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}.$$

3. Déterminer l'image de l'intervalle $[0, 1]$ par f .

4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α sur $[0, 1]$.

5. Soit (u_n) la suite numérique définie par :

$$u_0 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que si (u_n) converge alors sa limite est α .

6. Montrer que $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. En utilisant que $\alpha = f(\alpha)$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{3}{4} |u_n - \alpha|.$$

8. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \left|\frac{1}{3} - \alpha\right|,$$

et que (u_n) converge vers α .

9. Déterminer un rang à partir duquel $|u_n - \alpha| < 10^{-3}$.

Solution :

1. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$.

<https://keepmath.com>

$D_f = \mathbb{R}$ car $x^2 + 3 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Calcul de f' et f'' :

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 3) - x(2x)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{3 - x^2}{(x^2 + 3)^2}.$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2 + 3)^2 - (3 - x^2)2(x^2 + 3)(2x)}{(x^2 + 3)^4} = \frac{2x(x^2 - 9)}{(x^2 + 3)^3}.$$

Pour $x \in [0, 1]$, $x^2 - 9 < 0$ et $x \geq 0$, donc $f''(x) < 0$.

2. f' est décroissante sur $[0, 1]$ car $f'' < 0$.

Donc $f'(1) \leq f'(x) \leq f'(0)$.

$$f'(0) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{3 - 1}{(1 + 3)^2} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}.$$

$$\boxed{\frac{1}{8} \leq f'(x) \leq \frac{1}{3}}.$$

3. $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{1}{4}$.

Comme f est continue et croissante sur $[0, 1]$ (car $f'(x) > 0$), on a :

$$\boxed{f([0, 1]) = \left[0, \frac{1}{4}\right]}.$$

4. Soit $g(x) = f(x) - x$.

$$g(0) = 0 > 0 \text{ et } g(1) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0.$$

g est continue, donc il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est-à-dire $f(\alpha) = \alpha$.

$$g'(x) = f'(x) - 1 < 0 \text{ car } f'(x) \leq \frac{1}{3} < 1.$$

Donc g est strictement décroissante, α est unique.

5. Si (u_n) converge vers l , alors $l = f(l)$ car f est continue.

La seule solution de $f(x) = x$ dans $[0, 1]$ est α , donc $l = \alpha$.

6. Montrons par récurrence que $u_n \in [0, 1]$.

$$u_0 = \frac{1}{3} \in [0, 1].$$

Si $u_n \in [0, 1]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f([0, 1]) = [0, \frac{1}{4}] \subset [0, 1]$.

7. D'après le théorème des accroissements finis :

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq \sup_{[0,1]} |f'(x)| \cdot |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{3} |u_n - \alpha|.$$

8. Par récurrence :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |u_0 - \alpha| = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left|\frac{1}{3} - \alpha\right|.$$

Comme $\frac{1}{3} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \alpha| = 0$.

Donc (u_n) converge vers α .

9. On cherche n tel que :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \left|\frac{1}{3} - \alpha\right| < 10^{-3}.$$

$\alpha \approx 0.3473$, donc $\left|\frac{1}{3} - \alpha\right| \approx 0.014$.

On a $\left(\frac{1}{3}\right)^n \times 0.014 < 10^{-3} \iff \left(\frac{1}{3}\right)^n < 0.0714$.

$$\iff n \ln(1/3) < \ln(0.0714) \iff n > \frac{\ln(0.0714)}{\ln(1/3)} \approx \frac{-2.639}{-1.099} \approx 2.4.$$

$$\boxed{n \geq 3}.$$

Chapter 2

Examen Rattrapage

Exercice 2.1. (6 points) Soit la fonction réelle définie par :

$$f(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right).$$

1. Déterminer D_f , le domaine de définition de f .
2. Montrer que la fonction f est bijective en précisant son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée.
3. Déterminer sa fonction réciproque f^{-1} .

Solution :

<https://keepmath.com>

1. $f(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right).$

Il faut $\frac{1-x}{1+x} > 0.$

$$1+x \neq 0 \implies x \neq -1.$$

On étudie le signe de $\frac{1-x}{1+x}$:

- $-1 < x < 1 : \frac{1-x}{1+x} > 0.$
- $x < -1$ ou $x > 1 : \frac{1-x}{1+x} < 0.$

Donc $D_f =]-1, 1[.$

2. f est continue sur $] -1, 1[$ car composée de fonctions continues.

f est dérivable sur $] -1, 1[$:

$$f'(x) = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1-x)(1+x)} = \frac{-2}{1-x^2} < 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $] -1, 1[.$

f est continue et strictement monotone, donc elle est bijective de $] -1, 1[$ vers $f(]-1, 1[)$.

Calculons les limites :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) = -\infty.$$

Donc f est une bijection de $] -1, 1[$ vers $\mathbb{R}$.

3. Soit $y = f(x) = \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$.

$$e^y = \frac{1-x}{1+x} \implies e^y(1+x) = 1-x \implies e^y + e^y x = 1-x \implies x(e^y + 1) = 1 - e^y.$$

$$x = \frac{1 - e^y}{1 + e^y}.$$

Donc :

$$f^{-1}(y) = \frac{1 - e^y}{1 + e^y}.$$

Exercice 2.2. (6 points)

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

3. En déduire la limite de :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x.$$

Solution :

1. Théorème des accroissements finis :

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

2. Soit $g(t) = \ln(t)$. g est continue sur $[x, 1+x]$ et dérivable sur $]x, 1+x[$.

D'après le TAF, il existe $c \in]x, 1+x[$ tel que :

$$g(1+x) - g(x) = (1+x-x)g'(c) = g'(c) = \frac{1}{c}.$$

Comme $x < c < 1+x$, on a $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$.

Donc :

$$\frac{1}{1+x} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

3.

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = e^{x(\ln(1+x) - \ln(x))}.$$

D'après la question 2 :

$$\frac{x}{1+x} < x(\ln(1+x) - \ln(x)) < 1.$$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x} = 1$.

Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(1+x) - \ln(x)) = 1.$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}.$$

Exercice 2.3. (8 points) Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^5 - x - 1.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α qui appartient à $[1, 2]$.
2. Soit g la fonction définie sur $[\alpha, 2]$ par :

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Montrer que g est croissante sur $[\alpha, 2]$.

3. En déduire que l'image de $[\alpha, 2]$ par g est incluse dans $[\alpha, 2]$.
4. Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 \in [\alpha, 2], \quad u_{n+1} = g(u_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que (u_n) est monotone.

5. En déduire que (u_n) converge vers α .

Solution :

1. $f(x) = x^5 - x - 1$.

 f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1 < 0.$$

$$f(2) = 32 - 2 - 1 = 29 > 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

$$f'(x) = 5x^4 - 1.$$

$$\text{Pour } x \in [1, 2], f'(x) = 5x^4 - 1 \geq 5 - 1 = 4 > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $[1, 2]$. α est unique.

2.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

$$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}.$$

$$f'(x) = 5x^4 - 1.$$

$$f''(x) = 20x^3.$$

Sur $[\alpha, 2]$, $f(x) \geq 0$ et $f''(x) > 0$.

Donc $g'(x) \geq 0$, g est croissante sur $[\alpha, 2]$.

3. g est croissante sur $[\alpha, 2]$.

$$g(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha.$$

$$g(2) = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)}.$$

Comme g est croissante, $g([\alpha, 2]) = [g(\alpha), g(2)] \subset [\alpha, 2]$.

4. $u_0 \in [\alpha, 2]$.

$$u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n = -\frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

Si $u_n \geq \alpha$, alors $f(u_n) \geq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. (u_n) est décroissante.

Si $u_n \leq \alpha$, alors $f(u_n) \leq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. (u_n) est croissante.

Donc (u_n) est monotone.

5. (u_n) est monotone et bornée (car $u_n \in [\alpha, 2]$), donc elle converge.

Soit l sa limite. g est continue, donc $l = g(l)$.

$$l = l - \frac{f(l)}{f'(l)} \implies \frac{f(l)}{f'(l)} = 0 \implies f(l) = 0.$$

Comme α est l'unique solution de $f(x) = 0$ dans $[\alpha, 2]$, on a $l = \alpha$.

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha}.$$