

Travaux Dirigés et Solutions

Mathématiques - Analyse

Année Universitaire 2025/2026

Contents

1	Série de TD No1	2
2	Série de TD No2	13
3	Série de TD No3	21

<https://keepmath.com>

1 Série de TD No1

Exercice 1.1

Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure, un maximum, une borne inférieure, un minimum ?

$$A = [-3; 0[, \quad B = \{0\} \cup]-2; 1], \quad C =]-\infty; 0], \quad D = \left\{ \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Solution :

Étude des ensembles :

- $A = [-3; 0[$: L'ensemble est majoré par 0 et minoré par -3.
 - Borne supérieure (sup) : 0.
 - Maximum (max) : N'existe pas car $0 \notin A$.
 - Borne inférieure (inf) : -3.
 - Minimum (min) : -3 car $-3 \in A$.
- $B = \{0\} \cup]-2; 1]$: L'ensemble est majoré par 1 et minoré par -2.
 - sup B : 1.
 - max B : 1 car $1 \in B$.
 - inf B : -2.
 - min B : N'existe pas car $-2 \notin B$.
- $C =]-\infty; 0]$: L'ensemble n'est pas minoré mais majoré par 0.
 - sup C : 0.
 - max C : 0 car $0 \in C$.
 - inf C : N'existe pas (ou $-\infty$).
 - min C : N'existe pas.
- $D = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$: C'est l'ensemble des termes de la suite $u_n = 1/n$.
 - sup D : 1.
 - max D : 1 car $1 \in D$ (pour $n = 1$).
 - inf D : 0 (car $\lim 1/n = 0$ et $1/n > 0$).
 - min D : N'existe pas car $0 \notin D$.

Exercice 1.2 (Borne supérieure)

Soit E un sous-ensemble non vide et borné de $\mathbb{R}$. Montrer (par l'absurde) que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x_0 \in E$ tel que $\sup E < x_0 + \epsilon$.

Solution :

Démonstration par l'absurde :

Soit E un sous-ensemble non vide et borné de $\mathbb{R}$. Notons $M = \sup E$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que pour tout $x \in E$, on ait :

$$\sup E \geq x + \epsilon_0$$

Cela signifie que pour tout $x \in E$:

$$x \leq M - \epsilon_0$$

Donc $M - \epsilon_0$ est un majorant de E .

Or, $M - \epsilon_0 < M$ car $\epsilon_0 > 0$.

Ceci contredit le fait que M est la *plus petite* des bornes supérieures (le plus petit des majorants).

L'hypothèse de départ est fausse. Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_0 \in E$ tel que :

$$\sup E < x_0 + \epsilon$$

Exercice 1.3 (Caractérisation de la borne supérieure)

Déduire de la question précédente que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in E \text{ tel que } \sup E - \epsilon < x_0 \leq \sup E$$

Solution :

Soit $\epsilon > 0$. D'après la question précédente, il existe $x_0 \in E$ tel que :

$$\sup E < x_0 + \epsilon$$

ce qui équivaut à :

$$\sup E - \epsilon < x_0$$

De plus, par définition de la borne supérieure, pour tout $x \in E$, on a $x \leq \sup E$. Donc $x_0 \leq \sup E$.

En combinant les deux inégalités :

$$\sup E - \epsilon < x_0 \leq \sup E$$

C'est la caractérisation de la borne supérieure.

Exercice 1.4 (Limites de suites)

1. En utilisant la définition de la limite d'une suite, montrer que :

(a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0$

(b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1} = 2$

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n} = +\infty$

2. On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 6 - \frac{9}{u_n} \\ u_0 = 7 \end{cases}$$

(a) Montrer que $u_n > 3$ et déduire sa nature.

(b) Montrer que la suite $a_n = \frac{1}{u_n - 3}$ est une suite arithmétique dont on donnera l'expression en fonction de n . En déduire u_n en fonction de n .

Solution :

1. Limites avec la définition :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = 0 :$

Soit $\epsilon > 0$. On cherche un entier N tel que pour tout $n \geq N$:

$$\left| \frac{2}{n^2} - 0 \right| < \epsilon$$

On a :

$$\left| \frac{2}{n^2} \right| = \frac{2}{n^2} < \epsilon \iff n^2 > \frac{2}{\epsilon} \iff n > \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$$

Il suffit de choisir $N = \left\lfloor \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \right\rfloor + 1$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1} = 2 :$

Soit $\epsilon > 0$. On cherche N tel que pour $n \geq N$:

$$\left| \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1} - 2 \right| < \epsilon$$

$$\left| \frac{2n^2 + 3 - 2n^2 - 2}{n^2 + 1} \right| = \frac{1}{n^2 + 1} < \epsilon$$

On a $\frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2}$. On cherche n tel que $\frac{1}{n^2} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$.

On choisit $N = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right\rfloor + 1$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n} = +\infty :$

Soit $A > 0$. On cherche N tel que pour tout $n \geq N$:

$$\sqrt[3]{n} > A \iff n > A^3$$

On choisit $N = \lfloor A^3 \rfloor + 1$.

2. Étude de la suite u_n :

a) Montrons par récurrence que $u_n > 3$.

Initialisation : $u_0 = 7 > 3$. Vrai.

Hérédité : Supposons que $u_n > 3$ et montrons que $u_{n+1} > 3$.

On a :

$$u_n > 3 \implies \frac{1}{u_n} < \frac{1}{3} \implies -\frac{9}{u_n} > -3 \implies 6 - \frac{9}{u_n} > 6 - 3 = 3$$

Donc $u_{n+1} > 3$. Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 3$.

Monotonie : Étudions le signe de $u_{n+1} - u_n$.

$$u_{n+1} - u_n = 6 - \frac{9}{u_n} - u_n = \frac{-u_n^2 + 6u_n - 9}{u_n} = \frac{-(u_n - 3)^2}{u_n}$$

Comme $u_n > 3$, on a u_n positif et $-(u_n - 3)^2 < 0$ (car $u_n \neq 3$).

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$. La suite (u_n) est strictement décroissante.

Nature : (u_n) est décroissante et minorée par 3, donc elle est **convergente**.

b) Montrons que $a_n = \frac{1}{u_n - 3}$ est arithmétique.

Calculons $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 3} = \frac{1}{6 - \frac{9}{u_n} - 3} = \frac{1}{3 - \frac{9}{u_n}} = \frac{u_n}{3u_n - 9} = \frac{u_n}{3(u_n - 3)}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{u_n}{3(u_n - 3)} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{u_n - 3}{3(u_n - 3)} = \frac{1}{3}$$

Donc (a_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1/3$.

Le premier terme est :

$$a_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = \frac{1}{7 - 3} = \frac{1}{4}$$

Expression de a_n :

$$a_n = a_0 + nr = \frac{1}{4} + \frac{n}{3} = \frac{3 + 4n}{12}$$

Expression de u_n :

$$a_n = \frac{1}{u_n - 3} \implies u_n - 3 = \frac{1}{a_n} \implies u_n = 3 + \frac{1}{a_n}$$

Donc :

$$u_n = 3 + \frac{12}{3 + 4n}$$

Exercice 1.5 (Calculs de limites)

Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites (u_n) suivantes :

1. $u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$
2. $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$
3. $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
4. $u_n = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^n}$ pour $n \geq 1$

Solution :

1. a)

$$u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} = \frac{3^n \left(1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^n\right)}{3^n \left(1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n\right)} = \frac{1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{-2}{3}\right)^n}$$

Comme $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$, $\lim \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 - 0}{1 + 0} = \boxed{1}$$

2. b) On multiplie par l'expression conjuguée :

$$u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$

$$u_n = \frac{(n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}}$$

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}$$

En passant à la limite :

$$\lim u_n = \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$

3. c)

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$. Posons $x = \frac{1}{n}$.

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 1$$

Par continuité de l'exponentielle :

$$\lim u_n = e^1 = \boxed{e}$$

4. d)

<https://keepmath.com>

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^k}$$

La suite est croissante car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0$.

Pour $k \geq 2$, on a $k^k \geq 2^k \implies \frac{1}{k^k} \leq \frac{1}{2^k}$.

Donc pour $n \geq 2$:

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^k} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k}$$

C'est la somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{4} \frac{1 - (1/2)^{n-1}}{1 - 1/2} \leq \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

(u_n) est croissante et majorée, elle est donc **convergente**.

Exercice 1.6 (Suites produits)

Soient $a > 0$ et $u_n = (1+a)(1+a^2) \cdots (1+a^n)$.

1. Montrer que si $a \geq 1$ alors $u_n \rightarrow +\infty$.

2. On suppose $0 < a < 1$. Montrer que la suite (u_n) est convergente. (On pourra exploiter la majoration $1 + x \leq e^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.)

Solution :

1. Si $a \geq 1$, alors pour tout $k \geq 1$, $a^k \geq 1$, donc $1 + a^k \geq 2$.

Ainsi :

$$u_n \geq 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$, on en déduit par le théorème de comparaison que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$$

2. On suppose $0 < a < 1$.

La suite (u_n) est définie par des termes positifs. Étudions le rapport :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + a^{n+1} > 1$$

Donc $u_{n+1} > u_n$: la suite (u_n) est strictement **croissante**.

Utilisons l'inégalité $1 + x \leq e^x$.

Pour chaque facteur, on a : $1 + a^k \leq e^{a^k}$.

Donc :

$$u_n = \prod_{k=1}^n (1 + a^k) \leq \prod_{k=1}^n e^{a^k} = e^{\sum_{k=1}^n a^k}$$

La somme est une somme géométrique :

$$\sum_{k=1}^n a^k = a \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

Comme $0 < a < 1$, $1 - a^n < 1$, donc $\sum_{k=1}^n a^k < \frac{a}{1 - a}$.

Par conséquent :

$$u_n \leq e^{\frac{a}{1-a}}$$

La suite (u_n) est croissante et **majorée** par la constante $e^{\frac{a}{1-a}}$, elle est donc **convergente**.

Exercice 1.7 (Suite récurrente)

On considère la suite récurrente :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 > 0 \end{cases}$$

avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$.

1. Étudier f et le signe de $f(x) - x$. En déduire les limites possibles de u_n .

- On suppose que $0 \leq u_0 \leq \frac{1}{4}$. Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$ et qu'elle est croissante. En déduire sa limite.
- On suppose $\frac{1}{4} \leq u_0 \leq \frac{3}{4}$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. Quelle est la nature de (u_n) ?
- On suppose $u_0 > \frac{3}{4}$. Montrer que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?

Solution :

- $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$. f est dérivable et $f'(x) = 2x$. Pour $x > 0$, f est strictement croissante.

$$f(x) - x = x^2 - x + \frac{3}{16}$$

Cherchons les racines de cette équation du second degré :

$$\Delta = 1 - 4(1) \left(\frac{3}{16} \right) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Racines :

$$x_1 = \frac{1 - 1/2}{2} = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{1 + 1/2}{2} = \frac{3}{4}$$

Le polynôme $x^2 - x + \frac{3}{16}$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

- Si $x \in]0, 1/4[\cup]3/4, +\infty[$, $f(x) - x > 0 \implies f(x) > x$.
- Si $x \in]1/4, 3/4[$, $f(x) - x < 0 \implies f(x) < x$.

Si la suite (u_n) converge vers une limite l , l doit vérifier $f(l) = l$.

Les limites possibles sont donc $\boxed{1/4}$ et $\boxed{3/4}$.

- Si $0 \leq u_0 \leq \frac{1}{4}$.

Récurrence : Montrons que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$.

Pour $n = 0$, c'est l'hypothèse. Supposons $0 \leq u_n \leq \frac{1}{4}$.

Comme f est croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(1/4)$$

$$f(0) = 3/16 > 0 \text{ et } f(1/4) = (1/4)^2 + 3/16 = 1/16 + 3/16 = 4/16 = 1/4.$$

Donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1/4$. C'est vrai pour tout n .

Monotonie : Pour $x \in [0, 1/4]$, $f(x) \geq x$. Comme $u_n \in [0, 1/4]$, $f(u_n) \geq u_n$, donc $u_{n+1} \geq u_n$. La suite est croissante.

(u_n) est croissante et majorée par $1/4$, elle converge. Sa limite l vérifie $f(l) = l$ et $l \in [0, 1/4]$, donc $\boxed{l = 1/4}$.

3. Si $\frac{1}{4} \leq u_0 \leq \frac{3}{4}$.

Montrons par récurrence que $1/4 \leq u_n \leq 3/4$.

f étant croissante :

$$f(1/4) \leq f(u_n) \leq f(3/4) \implies 1/4 \leq u_{n+1} \leq (3/4)^2 + 3/16 = 9/16 + 3/16 = 12/16 = 3/4$$

Pour $x \in [1/4, 3/4]$, $f(x) \leq x$, donc $u_{n+1} = f(u_n) \leq u_n$.

(u_n) est décroissante et minorée par $1/4$, elle **converge**.

Sa limite l vérifie $f(l) = l$ et $l \in [1/4, u_0]$, donc la seule racine possible est $\boxed{l = 1/4}$.

4. Si $u_0 > \frac{3}{4}$.

Montrons que $u_n > 3/4$. C'est vrai pour $n = 0$. Si $u_n > 3/4$, alors $f(u_n) > f(3/4) \implies u_{n+1} > 3/4$.

Pour $x > 3/4$, $f(x) > x$, donc $u_{n+1} > u_n$. (u_n) est **croissante**.

Si elle était convergente vers l , on aurait $l \geq u_0 > 3/4$. Or les seules limites finies possibles sont $1/4$ et $3/4$. Contradiction.

Donc la suite **diverge** vers $\boxed{+\infty}$.

Exercice 1.8 (Moyenne arithmético-géométrique)

- Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^{+2}$, établir : $2\sqrt{ab} \leq a + b$.
- On considère les suites de réels positifs (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a, v_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_{n+1} \leq v_n$.

- Établir que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

Solution :

- On a toujours :

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \implies a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \implies 2\sqrt{ab} \leq a + b$$

- Montrons que $u_n \leq v_n$ pour $n \geq 1$.

D'après la question a), pour tout couple de réels positifs x, y :

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x + y}{2}$$

En appliquant ceci à $x = u_{n-1}$ et $y = v_{n-1}$, on obtient $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 1$.

- Montrons que $u_n \leq u_{n+1}$.

$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$. Comme $u_n \leq v_n$ (pour $n \geq 1$), en multipliant par u_n :

$$u_n^2 \leq u_n v_n \implies \sqrt{u_n^2} \leq \sqrt{u_n v_n} \implies u_n \leq u_{n+1}$$

La suite (u_n) est **croissante**.

- Montrons que $v_{n+1} \leq v_n$.

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}. \text{ Comme } u_n \leq v_n :$$

$$u_n + v_n \leq 2v_n \implies \frac{u_n + v_n}{2} \leq v_n \implies v_{n+1} \leq v_n$$

La suite (v_n) est **décroissante**.

3. On a, pour tout $n \geq 1$:

$$u_1 \leq u_n \leq v_n \leq v_1$$

(u_n) est croissante et majorée (par v_1), donc elle converge vers un réel l .

(v_n) est décroissante et minorée (par u_1), donc elle converge vers un réel l' .

En passant à la limite dans la relation $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$:

$$l' = \frac{l + l'}{2} \implies 2l' = l + l' \implies l = l'$$

Leur limite commune s'appelle la *moyenne arithmético-géométrique* de a et b .

Exercice 1.9 (Suite récurrente avec $f(x) = 1 + 1/x$)

On considère la suite (u_n) déterminée par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$$

<https://keepmath.com>

1. Étudier la fonction $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.
2. Montrer que : $\forall n \geq 1, |u_{n+1} - u_n| \leq \frac{4}{9}|u_n - u_{n-1}|$.
3. Montrer que la fonction $f \circ f$ est croissante sur $]0; +\infty[$. En déduire que les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont adjacentes ; calculer leur limite commune l .
4. Montrer qu'on a : $\forall n \geq 1, |u_{n+1} - l| \leq \frac{4}{9}|u_n - l|$.

Solution :

1. $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$. f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Montrons par récurrence que $3/2 \leq u_n \leq 2$.

Pour $n = 0$, $u_0 = 2$, ce qui satisfait la condition. Pour $n = 1$, $u_1 = 1 + 1/2 = 3/2$, ce qui satisfait la condition.

Supposons que $3/2 \leq u_n \leq 2$. Comme f est décroissante :

$$f(2) \leq f(u_n) \leq f(3/2)$$

$$f(2) = 1 + 1/2 = 3/2 \text{ et } f(3/2) = 1 + 2/3 = 5/3.$$

Donc $3/2 \leq u_{n+1} \leq 5/3 \leq 2$. La propriété est vraie au rang $n + 1$.

u_n est bien définie car elle ne s'annule jamais (strictement positive).

2.

$$|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})|$$

Sur l'intervalle $[3/2, 2]$, $|f'(x)| = \frac{1}{x^2}$. La valeur maximale de cette dérivée est atteinte pour $x = 3/2$:

$$\max |f'(x)| = \frac{1}{(3/2)^2} = \frac{4}{9}$$

Par l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq \frac{4}{9} |u_n - u_{n-1}|$$

D'où :

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{4}{9} |u_n - u_{n-1}|$$

3.

$$(f \circ f)(x) = f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{1}{1 + 1/x} = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$$

La dérivée est :

$$\frac{2(x+1) - (2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

$f \circ f$ est strictement croissante.

Soient $v_p = u_{2p}$ et $w_p = u_{2p+1}$.

$$v_{p+1} = u_{2p+2} = (f \circ f)(v_p). \quad \text{https://keepmath.com}$$

$v_0 = 2$, $v_1 = f(f(2)) = f(3/2) = 5/3 < 2$. Par récurrence, puisque $f \circ f$ est croissante, (v_p) est **décroissante**.

$w_0 = u_1 = 3/2$, $w_1 = f(f(3/2)) = f(5/3) = 1 + 3/5 = 8/5 > 3/2$. Par récurrence, (w_p) est **croissante**.

De plus, d'après b) :

$$|w_p - v_p| = |u_{2p+1} - u_{2p}| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{2p} |u_1 - u_0|$$

qui tend vers 0.

Les suites sont donc **adjacentes** et convergent vers une limite l .

Calcul de l : l vérifie $f(l) = l \iff 1 + 1/l = l \iff l^2 - l - 1 = 0$.

$\Delta = 1 - 4(1)(-1) = 5$. Les solutions sont $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Comme $u_n > 0$, on retient la solution positive :

$$l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(le nombre d'or).

4. Par l'inégalité des accroissements finis appliquée à f entre u_n et l (puisque $f(l) = l$) sur l'intervalle $[3/2, 2]$ où $|f'(x)| \leq 4/9$:

$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq \sup |f'(x)| \cdot |u_n - l| \leq \frac{4}{9} |u_n - l|$$

Exercice 1.10 (Suite divergente)

Montrer que la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = (1 - u_n)^2 \end{cases}$$

est divergente.

Solution :

Calculons les premiers termes :

$$u_0 = 1/2$$

$$u_1 = (1 - 1/2)^2 = 1/4$$

$$u_2 = (1 - 1/4)^2 = 9/16$$

$$u_3 = (1 - 9/16)^2 = (7/16)^2 = 49/256$$

$$u_4 = (1 - 49/256)^2 = (207/256)^2 \approx 0.65$$

Posons $f(x) = (1 - x)^2$. f est continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

f est décroissante sur $[0, 1]$.

Si la suite convergeait vers l , alors on aurait :

$$l = (1 - l)^2 \iff l = 1 - 2l + l^2 \iff l^2 - 3l + 1 = 0$$

Les solutions sont :

$$l = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Or $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1$, la seule limite possible dans $[0, 1]$ est :

$$l = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382$$

La fonction $f \circ f$ est croissante. Étudions les sous-suites u_{2n} et u_{2n+1} .

$u_0 = 0.5$, $u_2 = 0.5625$. Donc $u_0 < u_2$.

Comme $f \circ f$ est croissante, la sous-suite (u_{2n}) est croissante.

$u_1 = 0.25$, $u_3 \approx 0.19$. Donc $u_1 > u_3$.

La sous-suite (u_{2n+1}) est décroissante.

Pour prouver qu'elles divergent, étudions la dérivée de $f \circ f$ au point fixe :

$$f'(x) = -2(1 - x)$$

Au point fixe l :

$$|f'(l)| = |-2(1 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2})| = |-2 + 3 - \sqrt{5}| = |1 - \sqrt{5}| \approx 1.23 > 1$$

Le point fixe est **répulsif**. Par le théorème du point fixe répulsif, la suite ne peut pas converger vers l .

Comme l est la seule limite possible, on conclut que la suite **diverge**. (Plus précisément, les termes oscillent et s'écartent du point fixe : $u_{2n} \rightarrow 1$ et $u_{2n+1} \rightarrow 0$).

2 Série de TD No2

Exercice 2.1 (Domaines et parité)

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

(b) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4x + 3}$

(c) $f(x) = \frac{5x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

2. Déterminer la parité des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

(c) $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

(d) $f(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

Solution :

1. **Domaines de définition :** <https://keepmath.com>

a) Pour $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$, il faut $x^2 - 4x + 3 \geq 0$.

Racines de l'équation : $\Delta = 16 - 12 = 4$. $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$, $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$.

Le polynôme est positif à l'extérieur des racines :

$$D_f =]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[$$

b) Pour $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4x + 3}$, il faut $x \geq 0$ et $x^2 - 4x + 3 \neq 0$.

Les racines du dénominateur sont 1 et 3.

$$D_f = [0, +\infty[\setminus \{1, 3\} = [0, 1[\cup]1, 3[\cup]3, +\infty[$$

c) Pour $f(x) = \frac{5x + 4}{x^2 + 3x + 2}$, il faut $x^2 + 3x + 2 \neq 0$.

$\Delta = 9 - 8 = 1$. Racines : $x_1 = \frac{-3-1}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-3+1}{2} = -1$.

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$$

2. **Parité :** (domaines de définition centrés en 0)

a)

$$f(-x) = (-x) \sin\left(\frac{1}{-x}\right) \frac{1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = (-x) \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = f(x)$$

La fonction est **paire**.

b)

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1 + (-x)^2}) = \ln(\sqrt{1 + x^2} - x)$$

On multiplie par le conjugué :

$$f(-x) = \ln\left(\frac{(\sqrt{1 + x^2} - x)(\sqrt{1 + x^2} + x)}{\sqrt{1 + x^2} + x}\right) = \ln\left(\frac{1 + x^2 - x^2}{\sqrt{1 + x^2} + x}\right) = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}\right) = -\ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

La fonction est **impaire** (c'est la fonction arghs).

c)

$$f(-x) = \frac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} = \frac{e^{-2x}(1 - e^{2x})}{e^{-2x}(1 + e^{2x})} = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = -\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -f(x)$$

La fonction est **impaire** (c'est la fonction th(x)).

d)

$$f(-x) = \ln\left|\frac{1 - x}{1 - (-x)}\right| = \ln\left|\frac{1 - x}{1 + x}\right| = \ln\left|\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^{-1}\right| = -\ln\left|\frac{1 + x}{1 - x}\right| = -f(x)$$

La fonction est **impaire** (c'est deux fois la fonction argh).

Exercice 2.2 (Calculs de limites)

1. Calculer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ <https://keepmath.com>
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - \sin(x)}{x}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{1/x}$

2. Déterminer les limites suivantes, lorsque celles-ci existent :

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
- (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Solution :

1. a) On multiplie par le conjugué :

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{2}{1+1} = \boxed{1}$$

b) On factorise par e^x :

$$\frac{e^x - \sin(x)}{x} = \frac{e^x}{x} \left(1 - \frac{\sin(x)}{e^x} \right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ (croissance comparée) et que $\frac{\sin(x)}{e^x} \rightarrow 0$ (car $\sin(x)$ est borné), la limite est :

$$(+\infty) \times (1 - 0) = \boxed{+\infty}$$

c) On passe à l'exponentielle :

$$(x+1)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x+1)\right)$$

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Par continuité de l'exponentielle, la limite est $e^1 = \boxed{e}$.

2. a) Soit $x_n = \frac{1}{n\pi}$. $x_n \rightarrow 0^+$ et $\sin(1/x_n) = \sin(n\pi) = 0 \rightarrow 0$.

Soit $y_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$. $y_n \rightarrow 0^+$ et $\sin(1/y_n) = \sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1 \rightarrow 1$.

Les deux suites donnent des limites différentes, donc la limite **n'existe pas**.

b) On a $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$.

Donc $-|x| \leq x \sin(1/x) \leq |x|$.

Par le théorème des gendarmes, comme $\pm|x| \rightarrow 0$ en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \boxed{0}$$

c) On pose $u = 1/x$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 0^+$.

$$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin(u)}{u}$$

On reconnaît une limite usuelle :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = \boxed{1}$$

Exercice 2.3 (Bijection)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $] -1, 1[$.

2. Déterminer, pour $y \in] -1, 1[$, une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.

Solution :

1. f est bien définie sur $\mathbb{R}$ car $1 + |x| \geq 1 > 0$. Elle est continue.

Montrons que f est strictement croissante.

$$\text{Si } x \geq 0, f(x) = \frac{x}{1+x}. f'(x) = \frac{1(1+x) - x(1)}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0.$$

$$\text{Si } x < 0, f(x) = \frac{x}{1-x}. f'(x) = \frac{1(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} > 0.$$

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc c'est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

Calculons les limites aux bornes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x} = 1$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1-x} = -1$$

Donc $f(\mathbb{R}) =]-1, 1[$. f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $] - 1, 1[$.

2. Soit $y \in]-1, 1[$. On cherche x tel que $y = f(x)$.

Puisque x et $f(x)$ ont le même signe, y et x ont le même signe.

- Si $y \geq 0$ (alors $x \geq 0$) :

$$y = \frac{x}{1+x} \implies y(1+x) = x \implies y + xy = x \implies x(1-y) = y \implies x = \frac{y}{1-y}$$

- Si $y < 0$ (alors $x < 0$) :

$$y = \frac{x}{1-x} \implies y(1-x) = x \implies y - xy = x \implies x(1+y) = y \implies x = \frac{y}{1+y}$$

On peut regrouper ces deux expressions :

$$x = \frac{y}{1 - \text{signe}(y)y} = \frac{y}{1 - |y|}$$

Donc :

$$\boxed{f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}}$$

Exercice 2.4 (Théorème du point fixe)

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.
 - (a) Montrer que si $f([a, b]) \subset [a, b]$ alors f admet un point fixe.
 - (b) Montrer que si $[a, b] \subset f([a, b])$ alors f admet un point fixe.

Solution :

1. Soit la fonction $g(x) = f(x) - x$. g est continue sur $[0, 1]$.

On a $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ (car f arrive dans $[0, 1]$).

Et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (car $f(1) \leq 1$).

Si $g(0) = 0$ ou $g(1) = 0$, on a trouvé un point fixe.

Sinon, $g(0) > 0$ et $g(1) < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0, 1[$ tel que $g(c) = 0$, ce qui équivaut à $f(c) = c$.

2. a) C'est exactement le même raisonnement que le point 1, adapté à l'intervalle $[a, b]$.

Posons $g(x) = f(x) - x$.

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \text{ car } f(a) \in [a, b] \implies f(a) \geq a.$$

$$g(b) = f(b) - b \leq 0 \text{ car } f(b) \in [a, b] \implies f(b) \leq b.$$

D'après le TVI, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, donc $f(c) = c$.

b) Supposons que $[a, b] \subset f([a, b])$.

Cela signifie qu'il existe $u \in [a, b]$ tel que $f(u) = a$, et il existe $v \in [a, b]$ tel que $f(v) = b$.

Posons encore $g(x) = f(x) - x$.

$$g(u) = f(u) - u = a - u \leq 0 \text{ (car } u \in [a, b] \implies u \geq a).$$

$$g(v) = f(v) - v = b - v \geq 0 \text{ (car } v \in [a, b] \implies v \leq b).$$

g change de signe entre u et v . D'après le TVI, il existe c entre u et v (donc $c \in [a, b]$) tel que $g(c) = 0$, donc $f(c) = c$.

Exercice 2.5 (Continuité)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en 0.
2. On considère $g(x) = xf(x)$. Montrer que g est continue en 0.

<https://keepmath.com>

Solution :

1. Pour que f soit continue en 0, il faudrait que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.

Soient les suites :

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{1}{\pi/2 + n\pi}$$

Les deux tendent vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

$$\lim f(x_n) = \lim \cos(2n\pi) = \lim 1 = 1$$

$$\lim f(y_n) = \lim \cos(\pi/2 + n\pi) = 0$$

Les limites suivant deux suites différentes donnent des résultats différents, donc la limite en 0 n'existe pas.

f n'est pas continue en 0.

2. On a $g(x) = x \cos(1/x)$ pour $x \neq 0$, et $g(0) = 0 \times f(0) = 0$.

Puisque $-1 \leq \cos(1/x) \leq 1$, on a $-|x| \leq x \cos(1/x) \leq |x|$.

Par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$$

Donc g est continue en 0.

Exercice 2.6 (Point fixe avec condition de croissance)

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ continue, telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$$

Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Solution :

Considérons la fonction $g(x) = f(x) - x$. g est continue.

On a $g(0) = f(0) - 0 = f(0)$.

Si $f(0) = 0$, alors $\alpha = 0$ est un point fixe et c'est terminé.

Supposons que $f(0) > 0$. Alors $g(0) > 0$.

Étudions la limite de g en $+\infty$:

$$g(x) = x \left(\frac{f(x)}{x} - 1 \right)$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell < 1$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - 1 \right) = \ell - 1 < 0$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = (+\infty) \times (\text{nombre négatif}) = -\infty$.

Puisque la limite de g est $-\infty$, il existe un réel $M > 0$ tel que $g(M) < 0$.

Nous avons donc $g(0) > 0$ et $g(M) < 0$.

La fonction g étant continue sur l'intervalle $[0, M]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]0, M[$ tel que $g(\alpha) = 0$, ce qui signifie $f(\alpha) = \alpha$.

Exercice 2.7 (Existence de solutions)

1. Montrer que l'équation $x^7 + 3x^4 - x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $]0, 1[$.
2. Montrer que l'équation $\ln(x^3 + x^2 + x - 3) = 0$ admet une solution unique dans $]1, 2[$.

Solution :

1. Soit $f(x) = x^7 + 3x^4 - x - 1$. f est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0, 1]$.

$$f(0) = -1 < 0.$$

$$f(1) = 1 + 3 - 1 - 1 = 2 > 0.$$

Comme $f(0)$ et $f(1)$ sont de signes opposés, par le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une racine dans $]0, 1[$.

2. $\ln(x^3 + x^2 + x - 3) = 0 \iff x^3 + x^2 + x - 3 = 1 \iff x^3 + x^2 + x - 4 = 0$.

$$\text{Soit } g(x) = x^3 + x^2 + x - 4.$$

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 3x^2 + 2x + 1.$$

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0$. $g'(x)$ est toujours du signe de 3, donc strictement positif.

g est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Calculons les valeurs aux bornes :

$$g(1) = 1 + 1 + 1 - 4 = -1 < 0$$

$$g(2) = 8 + 4 + 2 - 4 = 10 > 0$$

g change de signe et est strictement croissante, elle s'annule donc exactement une fois sur l'intervalle $]1, 2[$.

Exercice 2.8 (Théorème du point fixe de Picard)

Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un nombre réel $k \in]0, 1[$ tel que :

$$|f(x) - f(x')| \leq k|x - x'|, \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la suite (x_n) par :

$$\begin{cases} x_0 = a, \\ x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

- (a) Montrer que la suite (x_n) converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$.
- (b) Montrer que $l = f(l)$.

Solution :

<https://keepmath.com>

1. f est une fonction k -lipschitzienne.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|$$

Si $x \rightarrow x_0$, alors $|x - x_0| \rightarrow 0$, donc $k|x - x_0| \rightarrow 0$.

Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0 \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

f est bien continue en tout point.

2. a) Évaluons l'écart entre deux termes consécutifs :

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}|$$

Par récurrence :

$$|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$$

Montrons que c'est une suite de Cauchy. Soit $p > n$:

$$|x_p - x_n| = |x_p - x_{p-1} + x_{p-1} - \cdots - x_n| \leq \sum_{i=n}^{p-1} |x_{i+1} - x_i|$$

$$|x_p - x_n| \leq \sum_{i=n}^{p-1} k^i |x_1 - x_0| = |x_1 - x_0| k^n \frac{1 - k^{p-n}}{1 - k} \leq |x_1 - x_0| \frac{k^n}{1 - k}$$

Comme $0 < k < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$.

Donc pour $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour $n, p \geq N$, $|x_p - x_n| < \epsilon$.

La suite est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, elle est donc **convergente** vers une limite l .

b) On sait que $x_{n+1} = f(x_n)$.

On prend la limite quand $n \rightarrow +\infty$. $\lim x_{n+1} = l$.

Comme f est continue (prouvé en 1), $\lim f(x_n) = f(l)$.

Par unicité de la limite :

$$\boxed{l = f(l)}$$

<https://keepmath.com>

3 Série de TD No3

Exercice 3.1 (Fonction $x^2 \sin(1/x)$)

Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, noté g .
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que g' n'est pas continue en 0.

Solution :

1. On a $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1 \implies -x^2 \leq x^2 \sin(1/x) \leq x^2$.

Comme $\pm x^2 \rightarrow 0$ en 0, le théorème des gendarmes donne $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

f admet une limite finie, on peut la prolonger par continuité en posant :

$$g(x) = f(x) \text{ pour } x \neq 0 \quad \text{et} \quad g(0) = 0$$

2. Sur $\mathbb{R}^*$, g est le produit et la composée de fonctions dérivables, elle est donc dérivable.

$$g'(x) = 2x \sin(1/x) + x^2 \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cos(1/x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x) \quad \text{pour } x \neq 0$$

En 0, étudions le taux d'accroissement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$$

Donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

g est dérivable sur tout $\mathbb{R}$.

3. On a $g'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ pour $x \neq 0$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin(1/x) = 0$.

Cependant, $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x)$ n'existe pas (oscille entre -1 et 1).

Donc la limite de $g'(x)$ en 0 n'existe pas.

g' n'est pas continue en 0.

Exercice 3.2 (Étude de $f(x) = \arctan\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \arctan\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Étudier la dérivabilité à droite en 0.
4. Étudier les variations de f .

- Montrer que f définit une bijection entre $[1, +\infty[$ et un intervalle J qu'on déterminera.
- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $[1, 2]$.
- En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in [1, 2], |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$$

(On donne $\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \simeq 0.76$).

Solution :

- f est définie si la fraction existe et la racine est définie.

Il faut $x \geq 0$ pour la racine. Le dénominateur $1 + x \neq 0 \implies x \neq -1$, ce qui est toujours vrai pour $x \geq 0$.

$$D_f = [0, +\infty[$$

- En $+\infty$, $\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \sim \frac{2\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \arctan(0) = \boxed{0}$.

- Calculons la limite du taux d'accroissement en 0 à droite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)}{x}$$

On sait que $\arctan(u) \sim u$ en 0. Ici $u = \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \rightarrow 0$.

Le quotient est équivalent à $\frac{\frac{2\sqrt{x}}{1+x}}{x} = \frac{2}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Quand $x \rightarrow 0^+$, cette expression tend vers $+\infty$.

f n'est **pas dérivable** en 0 (demi-tangente verticale dirigée vers le haut).

- Sur $]0, +\infty[$, f est dérivable. Posons $u(x) = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{1 + u(x)^2}$$

$$u'(x) = 2 \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x) - \sqrt{x}(1)}{(1+x)^2} = \frac{\frac{1+x-2x}{\sqrt{x}}}{(1+x)^2} = \frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}$$

Le dénominateur de f' est positif. Le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - x$.

- $x \in]0, 1[$, $f'(x) > 0 \implies f$ est strictement croissante.
- $x \in]1, +\infty[$, $f'(x) < 0 \implies f$ est strictement décroissante.

Maximum en $x = 1$: $f(1) = \arctan(2/2) = \arctan(1) = \pi/4$.

5. Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, f est continue et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection vers l'intervalle image :

$$J =]\lim_{+\infty} f, f(1)] =]0, \pi/4]$$

6. Soit $g(x) = f(x) - x$ sur $[1, 2]$. g est continue et strictement décroissante (car c'est la somme de deux fonctions strictement décroissantes : $f(x)$ et $-x$).

$$g(1) = \pi/4 - 1 \approx 0.785 - 1 < 0$$

$$g(2) = f(2) - 2 = \arctan(2\sqrt{2}/3) - 2 \approx 0.76 - 2 < 0$$

(Remarque : L'intervalle $[1, 2]$ n'est pas adapté pour la solution. La solution est en réalité entre 0 et 1. On admettra pour la suite que la démonstration classique s'applique sur un autre intervalle.)

7. Cherchons le maximum de $|f'(x)|$ sur $[1, 2]$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1-x}{\sqrt{x}(1+x)^2}}{1 + \frac{4x}{(1+x)^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{x}((1+x)^2 + 4x)} = \frac{1-x}{\sqrt{x}(x^2 + 6x + 1)}$$

Sur $[1, 2]$, $1-x$ est négatif, et on cherche à majorer $\frac{x-1}{\sqrt{x}(x^2 + 6x + 1)}$.

Le numérateur est max en $x = 2$ (valeur 1). Le dénominateur est min en $x = 1$ (valeur $\sqrt{1}(8) = 8$).

Ainsi $|f'(x)| \leq 1/8 \leq 1/4$.

En appliquant l'IAF :

<https://keepmath.com>

$$\forall x \in [1, 2], |f(x) - f(\alpha)| \leq \sup |f'| \cdot |x - \alpha| \implies |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$$

Exercice 3.3 (Encadrements avec TAF)

1. À l'aide du théorème des accroissements finis, calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)e^{1/(x+1)} - xe^{1/x} \right)$$

2. Montrer les encadrements suivants :

$$(a) \quad \forall x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{|x|}.$$

$$(b) \quad \forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Solution :

1. Posons $f(t) = te^{1/t}$. On veut la limite de $f(x+1) - f(x)$ en $+\infty$.

Appliquons le TAF à f sur $[x, x+1]$ (avec $x > 0$).

Il existe $c \in]x, x+1[$ tel que :

$$f(x+1) - f(x) = (x+1-x)f'(c) = f'(c)$$

Calculons $f'(t)$:

$$f'(t) = e^{1/t} + t \left(-\frac{1}{t^2} \right) e^{1/t} = e^{1/t} - \frac{1}{t} e^{1/t} = e^{1/t} \left(1 - \frac{1}{t} \right)$$

On a $x < c < x + 1$. Si $x \rightarrow +\infty$, alors $c \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \lim_{c \rightarrow +\infty} e^{1/c} \left(1 - \frac{1}{c} \right) = e^0(1-0) = \boxed{1}$$

2. Encadrements (Formule de Taylor-Lagrange)

a) Pour e^x , ordre 1 avec reste de Lagrange entre 0 et x :

$$e^x = e^0 + x e^0 + \frac{x^2}{2} e^c = 1 + x + \frac{x^2}{2} e^c$$

avec c entre 0 et x .

Puisque $e^c > 0$ et $x^2 \geq 0$, on a $\frac{x^2}{2} e^c \geq 0$, donc $\boxed{e^x \geq 1 + x}$.

Pour la borne supérieure, comme c est entre 0 et x , on a $|c| \leq |x|$. Puisque l'exponentielle est croissante :

$$e^c \leq e^{|c|} \leq e^{|x|}$$

Donc $\frac{x^2}{2} e^c \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$, ce qui donne :

$$\boxed{e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} e^{|x|}}$$

b) Pour $f(x) = \ln(1+x)$ sur $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Ordre 2 avec reste de Lagrange :

$$\ln(1+x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(c) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \cdot \frac{2}{(1+c)^3} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+c)^3}$$

avec $c \in]0, x[$.

Comme $c > 0$, $\frac{x^3}{3(1+c)^3} > 0$, donc :

$$\boxed{\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}}$$

De plus, $1+c > 1 \implies (1+c)^3 > 1 \implies \frac{1}{(1+c)^3} < 1$.

Donc $\frac{x^3}{3(1+c)^3} < \frac{x^3}{3}$. Ce qui donne :

$$\boxed{\ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}}$$

Exercice 3.4 (Fonction croissante)

1. Soit f une fonction définie et continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifiant $f(0) = 0$.
Montrer que si $f'(x)$ est croissante, il en est de même pour $\frac{f(x)}{x}$.
2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \geq 0, f(x) \geq x$. Montrer que $f'(0) \geq 1$. Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$, il existe $c \in]0, x[$ tel que $f'(c) \geq 1$.
3. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0, 1], f'(x) > 0$. Montrer qu'il existe un réel m strictement positif tel que $\forall x \in [0, 1], f(x) \geq mx$.

Solution :

1. Soit $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Calculons $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$.

Pour montrer que g est croissante, il faut montrer que $xf'(x) - f(x) \geq 0$.

Par le TAF sur $[0, x]$, il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) - f(0) = (x - 0)f'(c) \implies f(x) = xf'(c)$$

On a donc :

$$xf'(x) - f(x) = xf'(x) - xf'(c) = x(f'(x) - f'(c))$$

Comme $c < x$ et f' est croissante, on a $f'(c) \leq f'(x) \implies f'(x) - f'(c) \geq 0$.

Comme $x > 0$, l'expression est positive. Donc $g'(x) \geq 0$ et $\frac{f(x)}{x}$ est croissante.

2. $f(0) = 0$ et $f(x) \geq x$.

Le taux d'accroissement en 0 est $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} \geq 1$.

En passant à la limite $x \rightarrow 0^+$, on obtient $f'(0) \geq 1$.

Par le TAF sur $[0, x]$, il existe $c \in]0, x[$ tel que :

$$f(x) - f(0) = xf'(c) \implies f'(c) = \frac{f(x)}{x}$$

Comme $\frac{f(x)}{x} \geq 1$, on a $f'(c) \geq 1$.

3. f est C^1 sur le compact $[0, 1]$, donc f' est continue.

Toute fonction continue sur un segment atteint ses bornes, donc il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f'(x_0) = \min_{x \in [0, 1]} f'(x)$.

Par hypothèse $f'(x) > 0$, donc $m = f'(x_0) > 0$.

Ainsi, $\forall t \in [0, 1], f'(t) \geq m$.

En intégrant cette inégalité de 0 à x (pour $x \geq 0$) :

$$\int_0^x f'(t)dt \geq \int_0^x mdt$$

$$f(x) - f(0) \geq mx$$

Comme $f(0) = 0$, on a $\forall x \in [0, 1], \boxed{f(x) \geq mx}$.

Exercice 3.5 (Développements limités)

Déterminer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ en 0 à l'ordre 4
2. $\arctan\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right)$ en 0 à l'ordre 4
3. $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2
4. $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \ln(x)$ à l'ordre 4 en $+\infty$

Solution :

1. On multiplie les DL de $\ln(1+x)$ et $\frac{1}{1+x}$ à l'ordre 4 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$$

Produit en ne gardant que les termes ≤ 4 :

$$P(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)(1 - x + x^2 - x^3 + x^4)$$

$$P(x) = x(1 - x + x^2 - x^3) - \frac{x^2}{2}(1 - x + x^2) + \frac{x^3}{3}(1 - x) - \frac{x^4}{4}$$

$$P(x) = x - x^2 + x^3 - x^4 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{4}$$

$$P(x) = x - \frac{3x^2}{2} + \left(\frac{6}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6}\right)x^3 - \left(\frac{12}{12} + \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12}\right)x^4$$

$$\boxed{DL_4(0) : x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)}$$

2. Soit $u = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4$. $u \rightarrow 0$.

$$\text{DL de } \arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + o(u^4).$$

$$\text{Calcul de } u^3 : (x - \frac{3}{2}x^2)^3 = x^3 - 3x^2(\frac{3}{2}x^2) = x^3 - \frac{9}{2}x^4 + o(x^4).$$

$$\text{Donc } \frac{u^3}{3} = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4).$$

$$\arctan(u) = \left(x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{25}{12}x^4\right) - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^4\right) + o(x^4)$$

$$= x - \frac{3}{2}x^2 + \left(\frac{11}{6} - \frac{2}{6}\right)x^3 + \left(-\frac{25}{12} + \frac{18}{12}\right)x^4$$

$$= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x^3 - \frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$$

3. Posons $h = x - 2$, $h \rightarrow 0$. $f(x) = \sqrt{2+h} = \sqrt{2}\sqrt{1+h/2}$.

On utilise $(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o(u^3)$ avec $u = h/2$.

$$= \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{1}{16} \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right) + o(h^3)$$

$$= \sqrt{2} \left(1 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{32} + \frac{h^3}{128} \right) + o(h^3)$$

En remplaçant h :

$$\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{32}(x-2)^2 + \frac{\sqrt{2}}{128}(x-2)^3 + o((x-2)^3)$$

4. $f(x) = \ln \left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x} \right) = \ln(1 + \sqrt{1/x^2 + 1})$.

Posons $u = 1/x$. Quand $x \rightarrow +\infty$, $u \rightarrow 0^+$.

<https://keepmath.com>

$$g(u) = \ln(1 + \sqrt{1+u^2}) = \ln \left(1 + 1 + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{8} + o(u^4) \right) = \ln \left(2 + \frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{8} \right)$$

$$= \ln \left(2 \left(1 + \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{16} \right) \right) = \ln(2) + \ln \left(1 + \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{16} \right)$$

$\ln(1+t) = t - t^2/2$. Posons $t = u^2/4 - u^4/16$.

$$= \ln(2) + \left(\frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{16} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{4} \right)^2 = \ln(2) + \frac{u^2}{4} - \frac{u^4}{16} - \frac{u^4}{32} = \ln(2) + \frac{u^2}{4} - \frac{3u^4}{32}$$

Revenant à x :

$$\ln(2) + \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{32x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

Exercice 3.6 (Limites par développements limités)

Calculer les limites suivantes en utilisant les développements limités :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (\cos(x) + x)}{x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - x - 1}{\sin^2(x)} \right)$$

Solution :

1. Ordre 2 en 0 :

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + o(x^2)$$

$$\cos(x) + x = 1 - x^2/2 + x + o(x^2) = 1 + x - x^2/2 + o(x^2)$$

$$\text{Numérateur : } (1 + x + x^2/2) - (1 + x - x^2/2) = x^2 + o(x^2).$$

$$\frac{x^2 + o(x^2)}{x^2} = 1 + o(1)$$

La limite est $\boxed{1}$.

2. $(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(1+x)\right)$.

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + o(x^2).$$

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) = 1 - x/2 + o(x).$$

La limite quand $x \rightarrow 0$ est 1. Donc par composition avec l'exponentielle, la limite est $\boxed{e}$.

3. Ordre 2 en 0 :

$$e^x - x - 1 = (1 + x + x^2/2 + o(x^2)) - x - 1 = x^2/2 + o(x^2).$$

$$\text{Dénominateur : } \sin(x) \sim x \implies \sin^2(x) \sim x^2 \implies \sin^2(x) = x^2 + o(x^2).$$

<https://keepmath.com>

$$\frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \frac{1/2 + o(1)}{1 + o(1)}$$

La limite est $\boxed{1/2}$.

Exercice 3.7 (Fonction réciproque)

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = 2 \tan x - x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque de classe C^1 .

2. Justifier que f^{-1} est impaire.

3. Donner le développement limité de f^{-1} à l'ordre 6 en 0.

Solution :

1. $f'(x) = 2(1 + \tan^2 x) - 1 = 1 + 2 \tan^2 x$. $f'(x) > 0$ sur l'intervalle.

f est strictement croissante, continue, dérivable et sa dérivée ne s'annule pas. D'après le théorème de la bijection, elle admet une réciproque C^1 .

2. f est impaire car $\tan$ est impaire et x est impair. La réciproque d'une fonction impaire est impaire.

En effet $f(f^{-1}(-y)) = -y$ et $f(-f^{-1}(y)) = -f(f^{-1}(y)) = -y$. Par injectivité, $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$.

3. f^{-1} étant impaire, son DL à l'ordre 6 n'a que des termes impairs :

$$f^{-1}(y) = ay + by^3 + cy^5 + o(y^6)$$

On a $f(f^{-1}(y)) = y$.

DL de $\tan(u) = u + u^3/3 + 2u^5/15 + o(u^6)$.

$$f(u) = 2(u + u^3/3 + 2u^5/15) - u = u + 2u^3/3 + 4u^5/15 + o(u^6).$$

On injecte $u = f^{-1}(y)$ dans ce DL :

$$u^3 = (ay + by^3)^3 = a^3y^3 + 3a^2y^2(by^3) = a^3y^3 + 3a^2by^5 + o(y^6).$$

$$u^5 = a^5y^5 + o(y^6).$$

$$f(f^{-1}(y)) = (ay + by^3 + cy^5) + \frac{2}{3}(a^3y^3 + 3a^2by^5) + \frac{4}{15}a^5y^5 + o(y^6)$$

En regroupant par puissance et en identifiant à y :

- Ordre 1 : $a = 1$.
- Ordre 3 : $b + \frac{2}{3}a^3 = 0 \implies b = -2/3$.
- Ordre 5 : $c + 2a^2b + \frac{4}{15}a^5 = 0 \implies c + 2(1)(-2/3) + 4/15 = 0 \implies c = 4/3 - 4/15 = 20/15 - 4/15 = 16/15$.

Le DL est :

$$f^{-1}(y) = y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{16}{15}y^5 + o(y^6)$$

Exercice 3.8 (Somme avec Taylor-Young) <https://keepmath.com>

Soit f une fonction de classe C^2 de l'intervalle $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1, 2, \dots, n\}$. Écrire la formule de Taylor-Young de f à l'ordre 2 au point $\frac{p}{n^2}$.
2. On considère la suite (u_n) :

$$u_n = \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n^2}\right)$$

Montrer que :

$$u_n = \frac{n+1}{2n}f'(0) + \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}f''(0) + R_n$$

où R_n est à déterminer.

3. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}f'(0)$.

Solution :

1. Formule de Taylor-Young de f en 0 à l'ordre 2 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2}f''(0) + x^2\epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x) \rightarrow 0$ en 0.

En substituant $x = \frac{p}{n^2}$, sachant que pour $n \rightarrow \infty$, ce point tend vers 0 :

$$f\left(\frac{p}{n^2}\right) = \frac{p}{n^2}f'(0) + \frac{p^2}{2n^4}f''(0) + \frac{p^2}{n^4}\epsilon\left(\frac{p}{n^2}\right)$$

2. Faisons la somme pour p allant de 1 à n :

$$u_n = \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n^2}\right) = \sum_{p=1}^n \left(\frac{p}{n^2} f'(0) + \frac{p^2}{2n^4} f''(0) + \frac{p^2}{n^4} \epsilon\left(\frac{p}{n^2}\right) \right)$$

On connaît les sommes classiques :

$$\sum_{p=1}^n p = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

En remplaçant :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} f'(0) + \frac{1}{2n^4} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} f''(0) + R_n$$

$$u_n = \frac{n+1}{2n} f'(0) + \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} f''(0) + R_n$$

où :

$$R_n = \sum_{p=1}^n \frac{p^2}{n^4} \epsilon\left(\frac{p}{n^2}\right)$$

3. Montrons que $R_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. <https://keepmath.com>

Soit $\epsilon > 0$. Comme $\epsilon(x) \rightarrow 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x| < \delta \implies |\epsilon(x)| < \epsilon$.

Pour n assez grand, $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \delta$. Donc pour tout $p \leq n$, $\frac{p}{n^2} \leq \frac{1}{n} < \delta$.

Ainsi, $|\epsilon\left(\frac{p}{n^2}\right)| < \epsilon$.

Alors :

$$|R_n| \leq \sum_{p=1}^n \frac{p^2}{n^4} \left| \epsilon\left(\frac{p}{n^2}\right) \right| \leq \epsilon \frac{1}{n^4} \sum_{p=1}^n p^2 = \epsilon \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4}$$

Le terme en n est équivalent à $\frac{2n^3}{6n^4} = \frac{1}{3n}$, qui tend vers 0.

Donc $|R_n| \rightarrow 0$.

Par ailleurs :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = 0$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2} f'(0)$$