

Examen

Examen Normal 2015-2016

Exercice 1. (4 points)

- 1) Donner la définition d'une intégrale généralisée convergente.
- 2) Énoncer le théorème de comparaison pour les intégrales généralisées.

Solution :

- 1) **Définition :** Soit f une fonction continue sur $[a, b[$, $(-\infty < a < b \leq +\infty)$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est **convergente** si la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt, \quad a \leq x < b,$$

admet une limite finie quand x tend vers b ; et on pose :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$$

Si cette limite n'existe pas, on dit que l'intégrale est divergente.

- 2) **Théorème de comparaison :** Soient f et g deux fonctions localement intégrables de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $c \in [a, b[$ tel que :

$$\forall t \in [c, b[, \quad 0 \leq f(t) \leq g(t).$$

Alors :

- Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.
- Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

Exercice 2. (6 points) Étudier la convergence des intégrales suivantes :

- 1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + x^2 + 1}$
- 2) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx$
- 3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}$

Solution :

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + x^2 + 1}.$$

En 0 : $\frac{1}{x^3 + x^2 + 1} \rightarrow 1$, donc pas de problème.

En $+\infty$: $\frac{1}{x^3 + x^2 + 1} \sim \frac{1}{x^3}$. $\alpha = 3 > 1$, donc converge.

Conclusion : L'intégrale converge.

$$2) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx.$$

En 0 : $\frac{\ln x}{x^2 + 1} \sim \ln x$. $\int_0^1 \ln x dx$ converge (vaut -1).

En $+\infty$: $\left| \frac{\ln x}{x^2 + 1} \right| \sim \frac{\ln x}{x^2}$. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ converge.

Conclusion : L'intégrale converge.

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(1-x)}.$$

En 0 : $\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, donc converge.

En 1 : $\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} \sim \frac{1}{1-x}$. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$ diverge.

Conclusion : L'intégrale diverge.

<https://keepmath.com>

Exercice 3. (10 points) Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$1) y' + 2y = \sin x \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$2) y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$3) y'' + y = \tan x \text{ sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Solution :

$$1) y' + 2y = \sin x.$$

Équation homogène : $y' + 2y = 0 \implies y_h = Ce^{-2x}$.

Solution particulière : $y_p = A \cos x + B \sin x$.

$$y'_p = -A \sin x + B \cos x.$$

$$y'_p + 2y_p = (2A + B) \cos x + (2B - A) \sin x = \sin x.$$

$$\begin{cases} 2A + B = 0 \\ 2B - A = 1 \end{cases} \implies A = -\frac{1}{5}, B = \frac{2}{5}.$$

$$\text{Donc } y_p = -\frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x.$$

$$\text{Solution générale : } \boxed{y = Ce^{-2x} - \frac{1}{5} \cos x + \frac{2}{5} \sin x}.$$

2) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

Équation caractéristique : $r^2 - 4r + 4 = 0 \implies (r - 2)^2 = 0$.

Racine double $r = 2$.

$$y_h = (C_1 + C_2x)e^{2x}.$$

Solution particulière : $y_p = Ax^2e^{2x}$.

$$y'_p = A(2x + 2x^2)e^{2x}.$$

$$y''_p = A(2 + 8x + 4x^2)e^{2x}.$$

$$y''_p - 4y'_p + 4y_p = A(2 + 8x + 4x^2 - 8x - 8x^2 + 4x^2)e^{2x} = 2Ae^{2x}.$$

Donc $2A = 1 \implies A = \frac{1}{2}$.

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^{2x}.$$

Solution générale : $y = (C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2)e^{2x}$.

3) $y'' + y = \tan x$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Méthode de variation des constantes :

$$y_p = \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x.$$

$$\begin{cases} \lambda' \cos x + \mu' \sin x = 0 \\ -\lambda' \sin x + \mu' \cos x = \tan x \end{cases}.$$

De la première : $\lambda' = -\mu' \tan x$.

En substituant dans la seconde : $-\mu' \tan x (-\sin x) + \mu' \cos x = \tan x$.

$$\mu'(\tan x \sin x + \cos x) = \mu' \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x \right) = \mu' \left(\frac{1}{\cos x} \right) = \tan x.$$

Donc $\mu' = \sin x \implies \mu = -\cos x$.

$$\lambda' = -\mu' \tan x = \sin x \tan x = \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} = \sec x - \cos x.$$

$$\lambda = \ln |\sec x + \tan x| - \sin x.$$

$$y_p = (\ln |\sec x + \tan x| - \sin x) \cos x + (-\cos x) \sin x = \cos x \ln |\sec x + \tan x| - 2 \sin x \cos x.$$

Solution générale :

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos x \ln |\sec x + \tan x| - 2 \sin x \cos x.$$

Examen

Examen Rattrapage 2015-2016

Exercice 4. (5 points)

- 1) Énoncer le critère de Cauchy pour les séries numériques.
- 2) En utilisant le critère de Cauchy, montrer que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Solution :

- 1) **Critère de Cauchy :** Une série numérique $\sum u_n$ est convergente si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, \forall q \geq p, \left| \sum_{k=p}^q u_k \right| \leq \varepsilon.$$

- 2) Pour la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$:

Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, choisissons $p = N$ et $q = 2N$.

$$\sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=N}^{2N} \frac{1}{2N} = (N+1) \cdot \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2}.$$

<https://keepmath.com>

Donc le critère de Cauchy n'est pas satisfait pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

La série harmonique diverge.

Exercice 5. (7 points) Étudier la convergence des séries suivantes :

- 1) $\sum \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$
- 2) $\sum \frac{n!}{2^n}$
- 3) $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$
- 4) $\sum \frac{1}{n(\ln n)^2}$ (à partir de $n = 2$)

Solution :

- 1) $\sum \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}$.

Étudions $\sum \frac{1}{n^2 + 1}$.

$\frac{1}{n^2 + 1} \sim \frac{1}{n^2}$. Série de Riemann $\alpha = 2 > 1$, donc converge.

La série est absolument convergente, donc convergente.

$$2) \sum \frac{n!}{2^n}.$$

Règle de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!/2^{n+1}}{n!/2^n} = \frac{n+1}{2} \rightarrow +\infty.$$

Donc la série diverge.

$$3) \sum \frac{\sin(n)}{n^2}.$$

$$\left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}. \text{ Série de Riemann } \alpha = 2 > 1 \text{ converge.}$$

Donc la série converge absolument.

$$4) \sum \frac{1}{n(\ln n)^2} \text{ (à partir de } n = 2 \text{).}$$

Comparaison avec une intégrale :

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u} \right]_{\ln 2}^{+\infty} = \frac{1}{\ln 2} < +\infty.$$

Donc la série converge.

Exercice 6. (8 points) Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ <https://keepmath.com>

- 1) Déterminer le rayon de convergence de la série.
- 2) Étudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.
- 3) Montrer que S est continue sur $[-1, 1]$.
- 4) Montrer que S est dérivable sur $] -1, 1[$ et calculer $S'(x)$.

Solution :

$$1) u_n = \frac{x^n}{n^2}.$$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{x^n} \right| = |x| \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \rightarrow |x|.$$

Donc $R = 1$.

2) Aux bornes :

Pour $x = 1$: $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann $\alpha = 2 > 1$).

Pour $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument.

Donc l'intervalle de convergence est $[-1, 1]$.

3) Pour $x \in [-1, 1]$, $|f_n(x)| = \left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$.

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série converge normalement sur $[-1, 1]$.

Chaque f_n est continue, donc S est continue sur $[-1, 1]$.

4) Sur $] -1, 1[$:

$$f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{n^2} = \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Pour $x \in [-a, a]$ avec $0 < a < 1$:

$$|f'_n(x)| \leq \frac{a^{n-1}}{n} \leq a^{n-1}.$$

$\sum a^{n-1}$ converge, donc la série des dérivées converge normalement sur $[-a, a]$.

Donc S est dérivable sur $] -1, 1[$ et :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

On peut aussi écrire : $S'(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$ pour $x \neq 0$.

<https://keepmath.com>

Examen

Examen Normal 2016-2017

Exercice 7. (4 points)

- 1) Donner la définition d'une série de fonctions normalement convergente.
- 2) Énoncer le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

Solution :

- 1) **Définition :** La série $\sum f_n$ est dite **normalement convergente** sur A s'il existe une série convergente $\sum v_n < +\infty$ à termes dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x \in A} |f_n(x)| \leq v_n.$$

- 2) **Théorème de dérivation terme à terme :** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions continûment dérivables $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$.

On suppose :

- 1) $\sum f'_n$ converge uniformément sur I vers $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- 2) Il existe $x_0 \in I$ tel que la série $\sum f_n(x_0)$ soit convergente.

Alors l'application $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est dérivable et on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(t).$$

Exercice 8. (6 points) Calculer les primitives suivantes :

- 1) $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} dx$
- 2) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$
- 3) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

Solution :

1) $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} dx.$

Division euclidienne : $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)}.$

Décomposition : $\frac{x + 1}{(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}.$

$$x + 1 = A(x + 1) + B(x - 1).$$

Pour $x = 1 : 2 = 2A \implies A = 1.$

Pour $x = -1 : 0 = -2B \implies B = 0.$

Donc $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{1}{x - 1}.$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x - 1| + C.$$

2) $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 1}.$

Posons $u = x + 1, du = dx.$

$$\int \frac{du}{u^2 + 1} = \arctan u + C = \arctan(x + 1) + C.$$

3) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx.$

Posons $u = \cos x, du = -\sin x dx.$

$$\sin^3 x \cos^2 x = \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^2 x = \sin x (u^4 - u^2).$$

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = - \int (u^4 - u^2) du = -\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} + C = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Exercice 9. (10 points) <https://keepmath.com>

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = e^x$ sur $\mathbb{R}.$

2) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + y = \cos x$ sur $\mathbb{R}.$

3) Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli : $y' + y = xy^3$ sur $\mathbb{R}.$

Solution :

1) $y'' - 2y' + y = e^x.$

Équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = 0 \implies (r - 1)^2 = 0.$

Racine double $r = 1.$

$$y_h = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

Solution particulière : $y_p = Ax^2 e^x.$

$$y'_p = A(2x + x^2)e^x.$$

$$y''_p = A(2 + 4x + x^2)e^x.$$

$$y''_p - 2y'_p + y_p = A(2 + 4x + x^2 - 4x - 2x^2 + x^2)e^x = 2Ae^x.$$

Donc $2A = 1 \implies A = \frac{1}{2}.$

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 e^x.$$

Solution générale : $y = (C_1 + C_2 x + \frac{1}{2}x^2)e^x.$

2) $y'' + y = \cos x$.

Équation caractéristique : $r^2 + 1 = 0 \implies r = \pm i$.

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Solution particulière : $y_p = Ax \cos x + Bx \sin x$.

$$y'_p = (A + Bx) \cos x + (B - Ax) \sin x.$$

$$y''_p = (-Ax + 2B) \cos x + (-Bx - 2A) \sin x.$$

$$y''_p + y_p = 2B \cos x - 2A \sin x = \cos x.$$

$$\begin{cases} 2B = 1 \\ -2A = 0 \end{cases} \implies A = 0, B = \frac{1}{2}.$$

$$y_p = \frac{x}{2} \sin x.$$

Solution générale : $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{x}{2} \sin x$.

3) $y' + y = xy^3$. (Équation de Bernoulli avec $n = 3$)

Posons $u = y^{1-3} = y^{-2}$.

$$y = u^{-1/2}, y' = -\frac{1}{2}u^{-3/2}u'.$$

L'équation devient : $-\frac{1}{2}u^{-3/2}u' + u^{-1/2} = xu^{-3/2}$.

Multiplions par $-2u^{3/2}$: $u' - 2u = -2x$.

Soit $u' - 2u = -2x$.

Équation homogène : $u' - 2u = 0 \implies u_h = Ce^{2x}$.

Solution particulière : $u_p = Ax + B$.

$$u'_p - 2u_p = A - 2(Ax + B) = -2Ax + (A - 2B) = -2x.$$

$$\begin{cases} -2A = -2 \\ A - 2B = 0 \end{cases} \implies A = 1, B = \frac{1}{2}.$$

$$u_p = x + \frac{1}{2}.$$

$$u = x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}.$$

Comme $y = u^{-1/2}$: $y = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{2} + Ce^{2x}}}$.