

TD N°1 : Calcul Intégral

Exercice 0.1. Calculer les primitives suivantes :

1. $\int x^2 \ln x \, dx$

2. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

4. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$

Solution :

1. $\int x^2 \ln x \, dx$ (Intégration par parties)

Posons $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$. Alors $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^3}{3}$.

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4}$

Posons $u = x + 1$, $du = dx$.

$$\int \frac{du}{u^2 + 4} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{u}{2}\right) + C = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$

Posons $x = 2 \sin t$, $dx = 2 \cos t \, dt$.

$$\int \frac{2 \cos t \, dt}{\sqrt{4 - 4 \sin^2 t}} = \int \frac{2 \cos t \, dt}{2 \cos t} = \int dt = t + C = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

4. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$

Posons $x = \cosh t$, $dx = \sinh t \, dt$.

$$\int \frac{\sinh t \, dt}{\cosh^2 t \sqrt{\cosh^2 t - 1}} = \int \frac{\sinh t \, dt}{\cosh^2 t \sinh t} = \int \frac{dt}{\cosh^2 t} = \tanh t + C = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C.$$

Exercice 0.2. Calculer les intégrales définies suivantes :

1. $\int_0^1 x e^x \, dx$

$$2. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x \, dx$$

$$3. \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

$$4. \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

Solution :

$$1. \int_0^1 x e^x \, dx \text{ (Intégration par parties)}$$

Posons $u = x$, $dv = e^x dx$. Alors $du = dx$, $v = e^x$.

$$\int_0^1 x e^x \, dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x \, dx$$

Posons $u = \sin x$, $du = \cos x \, dx$.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos x \, dx = \int_0^1 u^3 \, du = \left[\frac{u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

$$3. \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

Posons $x = \tan t$, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$, $1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int_0^{\pi/4} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (1 + \cos 2t) \, dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

Exercice 0.3. Décomposer en éléments simples et calculer :

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2(x^2 + 1)} \, dx.$$

Solution :

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{x^3 + x + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

En réduisant au même dénominateur :

$$x^3 + x + 1 = Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)x^2.$$

$$= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + Ax + B.$$

Par identification :

$$\begin{cases} A + C = 1, \\ B + D = 0, \\ A = 1, \\ B = 1. \end{cases}$$

Donc $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = -1$.

$$\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2(x^2 + 1)} dx = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{-1}{x^2 + 1} dx = \ln|x| - \frac{1}{x} - \arctan x + C.$$

Exercice 0.4. En utilisant les sommes de Riemann, calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}.$$

Solution :

Soit $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $[0, 1]$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln 2.$$

Donc la limite est $\boxed{\ln 2}$.

TD N°2 : Intégrales Généralisées

Exercice 0.5. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$4. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

Solution :

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}. \text{ Convergente.}$$

2. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

En 0 : équivalent à 1, donc pas de problème.

En $+\infty$: $\frac{1}{1+x^3} \sim \frac{1}{x^3}$. Intégrale de Riemann $\alpha = 3 > 1$ converge.

Donc convergente.

3. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}.$

En $+\infty$: $\frac{1}{x^2+x+1} \sim \frac{1}{x^2}$. $\alpha = 2 > 1$ converge.

Convergente.

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

En 0 : $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$. $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ converge.

En 1 : symétrique, converge.

Donc convergente.

Exercice 0.6. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge.

Solution : <https://keepmath.com>

Sur $[0, 1]$: $e^{-x^2} \leq 1$, donc l'intégrale est convergente.

Sur $[1, +\infty[$: pour $x \geq 1$, $x^2 \geq x$, donc $e^{-x^2} \leq e^{-x}$.

Or $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ converge (vaut e^{-1}).

Par comparaison, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge.

Exercice 0.7. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$ suivant les valeurs de α .

Solution :

- En 0 : $\frac{\sin x}{x^\alpha} \sim x^{1-\alpha}$.
 - Si $\alpha < 2$: $1 - \alpha > -1$, donc converge.
 - Si $\alpha \geq 2$: diverge.
- En $+\infty$: $\left| \frac{\sin x}{x^\alpha} \right| \leq \frac{1}{x^\alpha}$.
 - Si $\alpha > 1$: convergence absolue.

- Si $0 < \alpha \leq 1$: convergence semi-convergente (par Abel avec $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ décroissante vers 0).
- Si $\alpha \leq 0$: divergence (car le terme ne tend pas vers 0).

Conclusion :

- $0 < \alpha < 2$: convergente (semi-convergente si $0 < \alpha \leq 1$, absolument convergente si $1 < \alpha < 2$).
- $\alpha = 2$: convergente en $+\infty$ mais divergente en 0.
- $\alpha \geq 2$: divergente.
- $\alpha \leq 0$: divergente.

Exercice 0.8. Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx$.

Solution :

- En 0 : $\frac{\ln x}{x^2 + 1} \sim \ln x$.

$\int_0^1 \ln x dx$ converge (vaut -1).

Donc converge en 0.

<https://keepmath.com>

- En $+\infty$: $\left| \frac{\ln x}{x^2 + 1} \right| \sim \frac{\ln x}{x^2}$.

$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx$ converge (par comparaison avec $\frac{1}{x^{3/2}}$ par exemple).

Donc converge en $+\infty$.

L'intégrale est convergente.

Valeur : $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx = 0$ (par changement de variable $x \mapsto 1/x$).

TD N°3 : Équations Différentielles

Exercice 0.9. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = e^{-2x}$

2. $y' + y = \cos x$

3. $y' - 2xy = x$

4. $y' + \frac{1}{x}y = \ln x$ sur $]0, +\infty[$

Solution :

1. $y' + 2y = e^{-2x}$

Équation homogène : $y' + 2y = 0 \implies y = Ce^{-2x}$.

Solution particulière : $y_p = Axe^{-2x}$ (car e^{-2x} est solution de l'homogène).

$$y'_p = Ae^{-2x}(1 - 2x).$$

$$y'_p + 2y_p = Ae^{-2x}(1 - 2x) + 2Axe^{-2x} = Ae^{-2x} = e^{-2x} \implies A = 1.$$

Donc $y_p = xe^{-2x}$.

Solution générale : $y = (C + x)e^{-2x}$.

2. $y' + y = \cos x$

Équation homogène : $y' + y = 0 \implies y = Ce^{-x}$.

Solution particulière : $y_p = A \cos x + B \sin x$.

$$y'_p = -A \sin x + B \cos x.$$

$$y'_p + y_p = (A + B) \cos x + (B - A) \sin x = \cos x.$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ B - A = 0 \end{cases} \implies A = B = \frac{1}{2}.$$

Donc $y_p = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

Solution générale : $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$.

3. $y' - 2xy = x$

Équation homogène : $y' - 2xy = 0 \implies \frac{dy}{y} = 2xdx \implies y = Ce^{x^2}$.

Variation de la constante : $y = C(x)e^{x^2}$.

$$y' = C'(x)e^{x^2} + 2xC(x)e^{x^2}.$$

$$y' - 2xy = C'(x)e^{x^2} = x \implies C'(x) = xe^{-x^2}.$$

$$C(x) = \int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

Solution générale : $y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$.

4. $y' + \frac{1}{x}y = \ln x$ sur $]0, +\infty[$

Équation homogène : $y' + \frac{1}{x}y = 0 \implies \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \implies y = \frac{C}{x}$.

Variation de la constante : $y = \frac{C(x)}{x}$.

$$y' = \frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}.$$

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{C'(x)}{x} = \ln x \implies C'(x) = x \ln x.$$

$$C(x) = \int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Solution générale : $y = \frac{x}{2} \ln x - \frac{x}{4} + \frac{C}{x}$.

Exercice 0.10. Résoudre l'équation de Bernoulli : $y' + y = xy^2$.

Solution :

Équation de Bernoulli avec $n = 2$.

Posons $u = y^{1-2} = y^{-1}$.

Alors $y = u^{-1}$, $y' = -u^{-2}u'$.

L'équation devient : $-u^{-2}u' + u^{-1} = xu^{-2}$.

Multiplions par $-u^2$: $u' - u = -x$.

Soit $u' - u = -x$.

Équation homogène : $u' - u = 0 \implies u = Ce^x$.

Solution particulière : $u_p = Ax + B$.

$u'_p - u_p = A - (Ax + B) = -Ax + (A - B) = -x$.

$$\begin{cases} -A = -1 \\ A - B = 0 \end{cases} \implies A = 1, B = 1.$$

Donc $u_p = x + 1$.

Solution générale : $u = x + 1 + Ce^x$.

Comme $y = \frac{1}{u}$: $y = \frac{1}{x + 1 + Ce^x}$.

Exercice 0.11. Résoudre l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$.

Solution :

Équation caractéristique : $r^2 - 3r + 2 = 0 \implies (r - 1)(r - 2) = 0$.

Racines : $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. <https://keepmath.com>

Solution homogène : $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

Solution particulière : $y_p = Axe^{2x}$ (car e^{2x} est solution de l'homogène).

$y'_p = Ae^{2x}(1 + 2x)$.

$y''_p = Ae^{2x}(4 + 4x)$.

$y''_p - 3y'_p + 2y_p = Ae^{2x}[(4 + 4x) - 3(1 + 2x) + 2x] = Ae^{2x}[(4 - 3) + (4 - 6 + 2)x] = Ae^{2x}$.

Donc $A = 1$.

$y_p = xe^{2x}$.

Solution générale : $y = C_1e^x + (C_2 + x)e^{2x}$.

Exercice 0.12. Résoudre l'équation : $y'' + 4y = \cos(2x)$.

Solution :

Équation caractéristique : $r^2 + 4 = 0 \implies r = \pm 2i$.

Solution homogène : $y_h = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$.

Solution particulière : $y_p = Ax \cos(2x) + Bx \sin(2x)$ (car $\cos(2x)$ est solution de l'homogène).

$y'_p = (A + 2Bx) \cos(2x) + (B - 2Ax) \sin(2x)$.

$y''_p = (-4Ax + 4B) \cos(2x) + (-4Bx - 4A) \sin(2x)$.

$y''_p + 4y_p = 4B \cos(2x) - 4A \sin(2x) = \cos(2x)$.

$$\begin{cases} 4B = 1 \\ -4A = 0 \end{cases} \implies A = 0, B = \frac{1}{4}.$$

$y_p = \frac{x}{4} \sin(2x)$.

Solution générale : $y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{x}{4} \sin(2x)$.

TD N°4 : Séries Numériques

Exercice 0.13. Étudier la convergence des séries suivantes :

1. $\sum \frac{n}{n^2 + 1}$

2. $\sum \frac{1}{n^2 + n}$

3. $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$

4. $\sum \frac{n!}{n^n}$

Solution :

1. $\sum \frac{n}{n^2 + 1}$.

$\frac{n}{n^2 + 1} \sim \frac{1}{n}$. Série de Riemann $\alpha = 1$ diverge.

Donc la série diverge.

2. $\sum \frac{1}{n^2 + n}$.

$\frac{1}{n^2 + n} \sim \frac{1}{n^2}$. Série de Riemann $\alpha = 2 > 1$ converge.

Calcul de la somme : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1} \rightarrow 1.$$

La série converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

3. $\sum \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$.

$\frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$. Série de Riemann $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ diverge.

Donc la série diverge.

4. $\sum \frac{n!}{n^n}$.

Règle de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \rightarrow e^{-1} < 1.$$

La série converge.

Exercice 0.14. Étudier la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Solution :

C'est une série alternée avec $u_n = \frac{1}{n}$.

- $u_n > 0$ pour tout n .
- u_n est décroissante.
- $u_n \rightarrow 0$.

D'après le critère des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Elle n'est pas absolument convergente car $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Donc elle est **semi-convergente**.

Sa somme est $-\ln 2$.

Exercice 0.15. Étudier la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$.

Solution :

C'est une série alternée avec $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$.

- $u_n > 0$ pour tout n .
- u_n est décroissante (car $\sqrt{n}+1$ est croissante).
- $u_n \rightarrow 0$.

<https://keepmath.com>

D'après le critère des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$ converge.

Elle n'est pas absolument convergente car $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+1} \sim \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Donc elle est **semi-convergente**.

Exercice 0.16. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$.

Solution :

Règle de d'Alembert :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0.$$

Donc la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Le rayon de convergence est $\boxed{R = +\infty}$.

La somme est $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

TD N°5 : Suites et Séries de Fonctions

Exercice 0.17. Soit $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence simple.
2. Étudier la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
3. Étudier la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ pour $a > 0$.

Solution :

1. Convergence simple :

Pour $x = 0$: $f_n(0) = 0$.

Pour $x \neq 0$: $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \rightarrow 0$.

Donc f_n converge simplement vers $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

2. Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$:

Étudions $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|}{1+n^2x^2}$.

La fonction $g_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ (pour $x \geq 0$) atteint son maximum en $x = \frac{1}{n}$.

$$g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{1+n^2 \cdot 1/n^2} = \frac{1/n}{2} = \frac{1}{2n}.$$

Donc $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$.

La convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.

3. Sur $[a, +\infty[$:

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2 a} \rightarrow 0.$$

La convergence est uniforme sur $[a, +\infty[$.

Exercice 0.18. Soit $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$.

1. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $S'(x)$.
3. Montrer que $\int_0^\pi S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3}$.

Solution :

$$1. |f_n(x)| = \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc la série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Chaque f_n est continue, donc S est continue sur $\mathbb{R}$.

$$2. f'_n(x) = \frac{n \cos(nx)}{n^2} = \frac{\cos(nx)}{n}.$$

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n}, \text{ mais } \sum \frac{1}{n} \text{ diverge.}$$

La convergence n'est pas normale. Cependant, la série $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ converge pour $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Donc S est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n}.$$

3. Par convergence normale, on peut permuter l'intégrale et la somme :

$$\int_0^\pi S(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^2} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3}.$$

Exercice 0.19. On considère la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

1. Déterminer le rayon de convergence.
2. Étudier la convergence aux bornes de l'intervalle de convergence.
3. Donner la somme de la série pour $x \in]-1, 1[$.

Solution :

1. Rayon de convergence :

$$u_n = \frac{x^n}{n}.$$

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} \right| = |x| \cdot \frac{n}{n+1} \rightarrow |x|.$$

Donc $R = 1$.

2. Aux bornes :

Pour $x = 1$: $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Pour $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (série alternée).

Donc l'intervalle de convergence est $[-1, 1[$.

3. Somme pour $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

En effet, $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$.