

Examen

Contrôle Continu N°1 – Durée 1h

Exercice 1. (1+1+2 pts) Soit (E, d) un espace vectoriel normé et $A \subset E$. Montrer que :

- 1) A est fermé $\iff \overline{A} = A$
- 2) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- 3) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. A-t-on l'égalité ? Justifier.

Solution :

- 1) Par définition, l'adhérence $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A .
Si A est fermé, alors A est un fermé contenant A , donc $\overline{A} \subset A$. Comme $A \subset \overline{A}$, on a $\overline{A} = A$.
Réciproquement, si $\overline{A} = A$, alors A est fermé car $\overline{A}$ est fermé.
- 2) Montrons les deux inclusions :
 $A \subset \overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et $B \subset \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
Donc $A \cup B \subset \overline{A \cup B}$. Comme $\overline{A \cup B}$ est fermé (union finie de fermés), on a $\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$.
Réciproquement, $A \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}$, donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$.
De même, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
D'où l'égalité.
- 3) $A \cap B \subset A \subset \overline{A}$ et $A \cap B \subset B \subset \overline{B}$.
Donc $A \cap B \subset \overline{A \cap B}$. Comme $\overline{A \cap B}$ est fermé (intersection de fermés), on a $\overline{A \cap B} \subset \overline{A \cap B}$.
L'égalité n'est pas toujours vraie. Contre-exemple : $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
 $\overline{A} = \mathbb{R}$, $\overline{B} = \mathbb{R}$, $\overline{A \cap B} = \mathbb{R}$, mais $A \cap B = \emptyset$, donc $\overline{A \cap B} = \emptyset$.

Exercice 2. (2+2+2 pts) Dans $\mathbb{R}^n$, on définit la norme $\|\cdot\|_p$ et la norme infinie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

- 1) Montrer que $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.
- 2) En déduire que $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_q$ pour tout $p, q \geq 1$.
- 3) Montrer que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Solution :

- 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty.$$

En effet, $\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} = \|x\|_p$.

Et $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} \leq (n \|x\|_\infty^p)^{1/p} = n^{1/p} \|x\|_\infty$.

Donc les normes sont équivalentes.

2) Par transitivité de la relation d'équivalence, $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_q \sim \|\cdot\|_\infty$ impliquent $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_q$.

3) On a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$.

Comme $\lim_{p \rightarrow \infty} n^{1/p} = 1$, par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Exercice 3. (2+2+2+2+2 pts) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $(0, 0)$.

2) Calculer les dérivées partielles de f en $(x, y) \neq (0, 0)$.

3) Calculer les dérivées partielles de f en $(x, y) = (0, 0)$.

4) Montrer que f est différentiable sur $(0, 0)$ en utilisant la définition de la différentiabilité.

5) f est-elle de classe C^1 ?

Solution :

1) En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$:

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} = r \cos^2 \theta \sin \theta \rightarrow 0.$$

Donc $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, f est continue en $(0, 0)$.

2) Pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - x^2 y(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2(x^2 + y^2) - x^2 y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

3) En $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0.$$

4) Soit $h = (h_1, h_2)$. On a $df_{(0,0)}(h) = 0$.

$$\frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - df_{(0,0)}(h)}{\|h\|} = \frac{h_1^2 h_2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}}.$$

En coordonnées polaires : $h_1 = r \cos \theta$, $h_2 = r \sin \theta$,

$$\frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^3} = \cos^2 \theta \sin \theta \rightarrow 0.$$

Donc f est différentiable en $(0, 0)$.

5) f n'est pas de classe C^1 car $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

En effet, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$.

En coordonnées polaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = 2 \cos \theta \sin^3 \theta.$$

Cette expression ne tend pas vers 0 quand $r \rightarrow 0$ (elle dépend de θ).

<https://keepmath.com>

Examen

Contrôle Continu N°2 – Durée 1h 30mn

Exercice 4. (2+3 pts) Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

- 1) Déterminer les points critiques de f .
- 2) Dédurre les extremums locaux de f .

Solution :

- 1) Points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 12 = 0. \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$$

De $y = \frac{2}{x}$, on a $x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \implies x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \implies x = \pm 1 \text{ ou } x = \pm 2.$$

- $x = 1 \implies y = 2$
- $x = -1 \implies y = -2$
- $x = 2 \implies y = 1$
- $x = -2 \implies y = -1$

Points critiques : $(1, 2)$, $(-1, -2)$, $(2, 1)$, $(-2, -1)$.

- 2) Dérivées secondes :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x.$$

$$\Delta = s^2 - rt = 36y^2 - 36x^2 = 36(y^2 - x^2).$$

- Au point $(1, 2)$: $\Delta = 36(4 - 1) = 108 > 0$, $r = 6 > 0$. Minimum local.
- Au point $(-1, -2)$: $\Delta = 36(4 - 1) = 108 > 0$, $r = -6 < 0$. Maximum local.
- Au point $(2, 1)$: $\Delta = 36(1 - 4) = -108 < 0$. Point selle.
- Au point $(-2, -1)$: $\Delta = 36(1 - 4) = -108 < 0$. Point selle.

Exercice 5. (4+2+3 pts) Soit l'intégrale double $I = \iint_D (x^2 - y^2) \cos(xy) dx dy$ où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x + y < 4, 1 < xy < 4, x < y\}.$$

Soit φ une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\varphi(u, v) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(u - v), \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v) \right).$$

- 1) Montrer que φ est un difféomorphisme d'un ensemble Δ à préciser sur l'ensemble D .
- 2) Représenter graphiquement le domaine Δ .
- 3) Calculer l'intégrale I en utilisant le changement de variable

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v).$$

Solution :

- 1) Le changement de variables est une rotation d'angle $\pi/4$.

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v). \end{cases}$$

Alors $x + y = \sqrt{2}u$, $xy = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, $x < y \iff v > 0$.

Le domaine D devient :

$$\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{2} < u < 2\sqrt{2}, v > 0, 2 < u^2 - v^2 < 8\}.$$

Le Jacobien :

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right| = 1.$$

Donc φ est un difféomorphisme de Δ sur D .

- 2) Représentation graphique de Δ :

$$\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{2} < u < 2\sqrt{2}, v > 0, v^2 > u^2 - 8, v^2 < u^2 - 2\}.$$

- 3) $x^2 - y^2 = -2uv$ et $\cos(xy) = \cos\left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right)$.

$$I = \iint_{\Delta} (-2uv) \cos\left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right) du dv.$$

On intègre par rapport à v : posons $w = \frac{u^2 - v^2}{2}$, $dw = -v dv$.

$$I = 2 \iint_{\Delta} u \cdot \frac{dw}{du} \cos w \cdot du = 2 \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} u \left[\sin \left(\frac{u^2 - v^2}{2} \right) \right]_{v=0}^{v=\sqrt{u^2-4}} du.$$

$$I = 2 \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} u [\sin 2 - \sin(u^2/2)] du.$$

$$I = 2 \sin 2 \left[\frac{u^2}{2} \right]_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} - 2 \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} u \sin(u^2/2) du.$$

$$I = \sin 2(8 - 2) + 2 [\cos(u^2/2)]_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = 6 \sin 2 + 2(\cos 4 - \cos 1).$$

Exercice 6. (6 pts) Calculer le volume du domaine D délimité par la sphère de rayon a et les plans $z = b$ et $z = -b$ avec $0 < b < a$.

Solution :

Le domaine est

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, -b \leq z \leq b\}.$$

En coordonnées cylindriques :

$$D = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{a^2 - z^2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -b \leq z \leq b\}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{-b}^b \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= \int_{-b}^b \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - z^2}{2} \, d\theta \, dz \\ &= \pi \int_{-b}^b (a^2 - z^2) \, dz \\ &= \pi \left[a^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-b}^b \\ &= \pi \left(2a^2 b - \frac{2b^3}{3} \right) \\ &= \frac{2\pi b}{3} (3a^2 - b^2). \end{aligned}$$

Examen

Rattrapage – Durée 1h

Exercice 7. (2+2 pts) Dans $\mathbb{R}^2$, on définit la norme N par :

$$N(x, y) = \max\{|x|, |y|, |x - y|\}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- 1) Montrer que N est une norme de $\mathbb{R}^2$.
- 2) Dans $(\mathbb{R}^2, N)$, représenter graphiquement la boule $B(0, 1)$.

Solution :

- 1) Vérifions les propriétés d'une norme :

- Séparation : $N(x, y) = 0 \iff |x| = |y| = |x - y| = 0 \iff x = y = 0$.
- Homogénéité : Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$N(\lambda x, \lambda y) = \max\{|\lambda x|, |\lambda y|, |\lambda x - \lambda y|\} = |\lambda| \max\{|x|, |y|, |x - y|\} = |\lambda| N(x, y).$$

- Inégalité triangulaire : Pour (x, y) et (x', y') ,

$$|x + x'| \leq |x| + |x'| \leq N(x, y) + N(x', y').$$

$$|y + y'| \leq |y| + |y'| \leq N(x, y) + N(x', y').$$

$$|(x + x') - (y + y')| = |(x - y) + (x' - y')| \leq |x - y| + |x' - y'| \leq N(x, y) + N(x', y').$$

$$\text{Donc } N(x + x', y + y') \leq N(x, y) + N(x', y').$$

- 2) $B(0, 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid N(x, y) < 1\}$.

$$N(x, y) < 1 \iff |x| < 1, |y| < 1, |x - y| < 1.$$

$$|x - y| < 1 \iff -1 < x - y < 1 \iff y - 1 < x < y + 1.$$

C'est un hexagone régulier.

Exercice 8. (2+2+2+2+2 pts) On pose D le domaine suivant

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, 0 < y, x^2 + y^2 < 1\}.$$

Soit φ une fonction $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\varphi(x, y) = (u, v) = \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \right).$$

- 1) Montrer que φ est un difféomorphisme d'un ensemble Δ à préciser sur l'ensemble D .
- 2) Représenter graphiquement les domaines D et Δ .
- 3) Calculer la matrice jacobienne de φ et celle de φ^{-1} .
- 4) Calculer le déterminant de la matrice jacobienne de φ au point (x, y) et celui de φ^{-1} au point (u, v) .

5) En utilisant le changement de variable φ , calculer les intégrales I et J :

$$I = \iint_D x \, dx \, dy, \quad J = \iint_D x^2 y^2 \, dx \, dy.$$

Solution :

1) Soit $u = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ et $v = x^2 + y^2$.

Alors $0 < u < 1$, $0 < v < 1$, et $x^2 = uv$, $y^2 = v(1 - u)$.

Comme $x > 0$ et $y > 0$, on a

$$x = \sqrt{uv}, \quad y = \sqrt{v(1 - u)}.$$

Donc $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < u < 1, 0 < v < 1\}$.

φ est un difféomorphisme de Δ sur D .

2) Représentation graphique :

D est le quart de disque unité dans le premier quadrant.

Δ est le carré unité.

3) Matrice jacobienne de φ :

$$\mathcal{J}_\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} & -\frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{2x}{2x} & \frac{2y}{2y} \end{pmatrix}.$$

Matrice jacobienne de φ^{-1} : <https://keepmath.com>

$$\mathcal{J}_{\varphi^{-1}}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{1-u}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-u}{v}} \end{pmatrix}.$$

$$4) \det(\mathcal{J}_\varphi(x, y)) = \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2y - \left(-\frac{2x^2y}{(x^2 + y^2)^2}\right) \cdot 2x = \frac{4y^3 + 4x^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\det(\mathcal{J}_{\varphi^{-1}}(u, v)) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{v}{u}}\sqrt{\frac{1-u}{v}} - \left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{v}{1-u}}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{v}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{u(1-u)}}.$$

$$5) I = \iint_D x \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{uv} \cdot \frac{1}{4\sqrt{u(1-u)}} \, du \, dv.$$

$$I = \frac{1}{4} \int_0^1 \sqrt{v} \, dv \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u}} \, du = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

$$J = \iint_D x^2 y^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 (uv) \cdot v(1-u) \cdot \frac{1}{4\sqrt{u(1-u)}} \, du \, dv.$$

$$J = \frac{1}{4} \int_0^1 v^2 \, dv \int_0^1 \frac{u(1-u)}{\sqrt{u(1-u)}} \, du = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{u(1-u)} \, du.$$

$$\int_0^1 \sqrt{u(1-u)} \, du = \frac{\pi}{8}.$$

$$\text{Donc } J = \frac{1}{12} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{96}.$$