

TD N°1 : Topologie

Exercice 0.1. Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$. Montrer que :

*) $A \text{ est fermé} \iff \overline{A} = A$

*) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

*) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Solution :

*) Par définition, l'adhérence $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A .

Si A est fermé, alors A est un fermé contenant A , donc $\overline{A} \subset A$. Comme $A \subset \overline{A}$, on a $\overline{A} = A$.

Réciproquement, si $\overline{A} = A$, alors A est fermé car $\overline{A}$ est fermé.

*) Montrons les deux inclusions :

$$A \subset \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \text{ et } B \subset \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

Donc $A \cup B \subset \overline{A \cup B}$. Comme $\overline{A \cup B}$ est fermé (union finie de fermés), on a $\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$.

Réciproquement, $A \subset A \cup B \subset \overline{A \cup B}$, donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$.

De même, $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$.

D'où l'égalité.

*) $A \cap B \subset A \subset \overline{A}$ et $A \cap B \subset B \subset \overline{B}$.

Donc $A \cap B \subset \overline{A \cap B}$. Comme $\overline{A \cap B}$ est fermé (intersection de fermés), on a $\overline{A \cap B} \subset \overline{A \cap B}$.

L'égalité n'est pas toujours vraie. Contre-exemple : $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. $\overline{A} = \mathbb{R}$, $\overline{B} = \mathbb{R}$, $\overline{A \cap B} = \mathbb{R}$, mais $A \cap B = \emptyset$, donc $\overline{A \cap B} = \emptyset$.

Exercice 0.2. Dans $\mathbb{R}^n$, on définit la norme $\|\cdot\|_p$ et la norme infinie par

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

*) Montrer que $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

*) En déduire que $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_q$ pour tout $p, q \geq 1$.

*) Montrer que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Solution :

*) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty.$$

En effet, $\|x\|_\infty = \max_i |x_i| \leq (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} = \|x\|_p$.

Et $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p} \leq (n \|x\|_\infty^p)^{1/p} = n^{1/p} \|x\|_\infty$.

Donc les normes sont équivalentes.

*) Par transitivité de la relation d'équivalence, $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_q \sim \|\cdot\|_\infty$ impliquent $\|\cdot\|_p \sim \|\cdot\|_q$.

*) On a $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$.

Comme $\lim_{p \rightarrow \infty} n^{1/p} = 1$, par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

Exercice 0.3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

*) Montrer que f est continue sur $(0, 0)$.

*) Calculer les dérivées partielles de f en $(x, y) \neq (0, 0)$.

*) Calculer les dérivées partielles de f en $(x, y) = (0, 0)$.

*) Montrer que f est différentiable sur $(0, 0)$ en utilisant la définition de la différentiabilité.

*) f est-elle de classe C^1 ?

Solution :

*) En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$:

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2} = r \cos^2 \theta \sin \theta \rightarrow 0.$$

Donc $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, f est continue en $(0, 0)$.

*) Pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy(x^2 + y^2) - x^2 y(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2(x^2 + y^2) - x^2 y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 - x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

*) En $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0.$$

*) Soit $h = (h_1, h_2)$. On a $df_{(0,0)}(h) = 0$.

$$\frac{f(h_1, h_2) - f(0, 0) - df_{(0,0)}(h)}{\|h\|} = \frac{h_1^2 h_2}{(h_1^2 + h_2^2)^{3/2}}.$$

En coordonnées polaires : $h_1 = r \cos \theta$, $h_2 = r \sin \theta$,

$$\frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^3} = \cos^2 \theta \sin \theta \rightarrow 0.$$

Donc f est différentiable en $(0, 0)$.

*) f n'est pas de classe C^1 car $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

En effet, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$.

En coordonnées polaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = 2r^4 \cos \theta \sin^3 \theta / r^4 = 2 \cos \theta \sin^3 \theta.$$

Cette expression ne tend pas vers 0 quand $r \rightarrow 0$ (elle dépend de θ).

TD N°2 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 0.4. Étudier la continuité en $(0, 0)$ des fonctions suivantes :

$$*) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^p y^q}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$*) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solution :

*) En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$:

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^{p+q} \cos^p \theta \sin^q \theta}{r^2} = r^{p+q-2} \cos^p \theta \sin^q \theta.$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{p+q-2} = 0 \iff p + q - 2 > 0 \iff p + q > 2.$$

Donc f est continue en $(0, 0)$ si $p + q > 2$.

$$*) f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$:

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta}{r^4 \cos^4 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{r \cos^2 \theta \sin \theta}{r^2 \cos^4 \theta + \sin^2 \theta}.$$

Pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, on a $f = 0$.

Pour $\theta = \pi/2$, on a $f = 0$.

$$\text{Mais pour } y = x^2 : f(x, x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Donc f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 0.5. Soit f une fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x} \sin(x^2 + y^2) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

*) Est-ce que f admet une limite à l'origine suivant toutes les directions ?

*) Est-ce que la fonction f admet une limite à l'origine ?

Solution :

*) On pose $y = \lambda x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} \sin(x^2 + y^2) = \lim_{x \rightarrow 0} \lambda \sin(x^2(1 + \lambda^2)) = 0.$$

f admet une limite à l'origine suivant toutes les directions (égale à 0).

*) On pose $x = y^3$:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{y^3} \sin(y^6 + y^2) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y^2(1 + y^4))}{y^2}.$$

Or $\sin(y^2(1 + y^4)) = y^2(1 + y^4) + o(y^2)$.

$$\text{Donc } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y^2(1 + y^4))}{y^2} = 1.$$

Comme la limite suivant cette courbe est $1 \neq 0$, la fonction f n'admet pas de limite à l'origine.

Exercice 0.6. Soit f une fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

*) Montrer que la limite de f au point $(0, 0)$ existe suivant toutes les directions.

*) f est-elle continue au point $(0, 0)$?

Solution :

*) On pose $y = \lambda x$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\lambda x)}{x^4 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lambda x}{x^2 + \lambda^2} = 0.$$

Donc f admet une limite à l'origine suivant toutes les directions (égale à 0).

*) f n'est pas continue en $(0, 0)$ car pour $y = x^2$:

$$f(x, x^2) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Donc la limite n'existe pas.

Exercice 0.7. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^p \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- *) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ pour tout $p \geq 1$.
- *) Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$ si et seulement si $p > 1$.
- *) Montrer que f est de classe C^1 si et seulement si $p \geq 3$.

Solution :

- *) En coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$:

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^p (\cos \theta + \sin \theta)^p \sin \left(\frac{1}{r} \right).$$

$\lim_{r \rightarrow 0} r^p = 0$ pour $p \geq 1$, donc f est continue en $(0, 0)$.

- *) $df_{(0,0)}(h, k) = 0$.

$$\epsilon(h, k) = \frac{f(h, k)}{\|(h, k)\|} = \frac{(h + k)^p \sin \left(\frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right)}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

En coordonnées polaires $h = r \cos \theta$, $k = r \sin \theta$:

$$\epsilon(r \cos \theta, r \sin \theta) = r^{p-1} (\cos \theta + \sin \theta)^p \sin \left(\frac{1}{r} \right).$$

Cette expression tend vers 0 quand $r \rightarrow 0$ si $p - 1 > 0$, c'est-à-dire $p > 1$.

Donc f est différentiable en $(0, 0)$ si $p > 1$.

- *) Pour que f soit de classe C^1 , il faut que les dérivées partielles soient continues en $(0, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = p(x + y)^{p-1} \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{x(x + y)^p}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cos \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right).$$

En coordonnées polaires, le premier terme est d'ordre r^{p-1} et le second d'ordre r^{p-2} .

Pour que la dérivée partielle soit continue en $(0, 0)$, il faut $p - 2 > 0$, c'est-à-dire $p > 2$, donc $p \geq 3$.

Exercice 0.8. Calculer les dérivées partielles secondes croisées en $(0, 0)$ de

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Que peut-on conclure ?

Solution :

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \frac{x^4 + 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \frac{x^4 - 4x^2y^2 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

En $(0, 0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = 0.$$

Calculons $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ pour $y \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y) - f(0, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} y \frac{h^2 - y^2}{h^2 + y^2} = -y.$$

$$\text{Donc } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k - 0}{k} = -1.$$

$$\text{De même, } \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = x, \text{ donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1.$$

$$\text{On a donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Le théorème de Schwarz n'est pas vérifié, donc f n'est pas de classe C^2 .

TD N°3 : Extrema

Exercice 0.9. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

*) Déterminer les points critiques de f .

*) Dédurre les extremums locaux de f .

Solution :

*) Points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 12 = 0. \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$$

$$\text{De } y = \frac{2}{x}, \text{ on a } x^2 + \frac{4}{x^2} = 5 \implies x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \implies x = \pm 1 \text{ ou } x = \pm 2.$$

$$- x = 1 \implies y = 2$$

$$- x = -1 \implies y = -2$$

$$- x = 2 \implies y = 1$$

$$- x = -2 \implies y = -1$$

Points critiques : $(1, 2), (-1, -2), (2, 1), (-2, -1)$.

*) Dérivées secondes :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x.$$

$$\Delta = s^2 - rt = 36y^2 - 36x^2 = 36(y^2 - x^2).$$

- Au point $(1, 2)$: $\Delta = 36(4 - 1) = 108 > 0, r = 6 > 0$. Minimum local.
- Au point $(-1, -2)$: $\Delta = 36(4 - 1) = 108 > 0, r = -6 < 0$. Maximum local.
- Au point $(2, 1)$: $\Delta = 36(1 - 4) = -108 < 0$. Point selle.
- Au point $(-2, -1)$: $\Delta = 36(1 - 4) = -108 < 0$. Point selle.

Exercice 0.10. Identifier les extremums de la fonction

$$f(x, y) = \ln(2x(y - 1) + 1).$$

Solution :

Dérivées premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2(y - 1)}{2x(y - 1) + 1},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x}{2x(y - 1) + 1}.$$

Points critiques :

$$\begin{cases} 2(y - 1) = 0, \\ 2x = 0. \end{cases}$$

Donc $(0, 1)$ est le seul point critique.

Dérivées secondes :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\frac{4(y - 1)^2}{(2x(y - 1) + 1)^2},$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{2}{(2x(y - 1) + 1)^2},$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\frac{4x^2}{(2x(y - 1) + 1)^2}.$$

Au point $(0, 1)$:

$$r = 0, \quad s = 2, \quad t = 0, \quad \Delta = s^2 - rt = 4 > 0.$$

Comme $r = 0$, on ne peut pas conclure avec le critère du second ordre.

Étudions directement f au voisinage de $(0, 1)$.

$$f(0, 1) = \ln(1) = 0.$$

$$f(x, 1) = \ln(1) = 0 \text{ pour tout } x.$$

$$f(0, y) = \ln(2(y - 1) + 1) = \ln(2y - 1).$$

Pour $y > 1$, $2y - 1 > 1$, donc $f(0, y) > 0$.

Pour $y < 1$, $2y - 1 < 1$, donc $f(0, y) < 0$ (si $y > 1/2$).

Donc $(0, 1)$ n'est ni un maximum ni un minimum. C'est un point selle.

Exercice 0.11. Soit f une fonction définie par $f(x, y) = x^3y - xy^3$.

*) Chercher les points critiques de f .

*) Montrer que f n'admet pas d'extremums.

Solution :

*) Points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y - y^3 = y(3x^2 - y^2) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^3 - 3xy^2 = x(x^2 - 3y^2) = 0. \end{cases}$$

- Si $y = 0$, alors $x(x^2) = 0 \implies x = 0$.
- Si $x = 0$, alors $y(-y^2) = 0 \implies y = 0$.
- Si $3x^2 = y^2$ et $x^2 = 3y^2$, alors $x^2 = 9x^2 \implies x = 0$, donc $y = 0$.

Donc $(0, 0)$ est le seul point critique.

*) Dérivées secondes :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 - 3y^2, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6xy.$$

Au point $(0, 0)$: $r = 0, s = 0, t = 0, \Delta = 0$.

On ne peut pas conclure avec le critère du second ordre.

Étudions f au voisinage de $(0, 0)$.

$$f(x, 0) = 0 \text{ pour tout } x.$$

$$f(0, y) = 0 \text{ pour tout } y.$$

$$f(x, x) = x^4 - x^4 = 0 \text{ pour tout } x.$$

$$f(x, -x) = -x^4 + x^4 = 0 \text{ pour tout } x.$$

$$f(x, 2x) = x^3(2x) - x(2x)^3 = 2x^4 - 8x^4 = -6x^4 < 0 \text{ pour } x \neq 0.$$

$$f(2x, x) = (2x)^3x - 2x(x)^3 = 8x^4 - 2x^4 = 6x^4 > 0 \text{ pour } x \neq 0.$$

Donc f prend des valeurs positives et négatives dans tout voisinage de $(0, 0)$. Aucun extremum.

TD N°4 : Intégrales Doubles

Exercice 0.12. Calculer l'intégrale double $\iint_D (x^2 - y^2) \cos(xy) \, dx \, dy$ où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x + y < 4, 1 < xy < 4, x < y\}.$$

Solution :

On utilise le changement de variables :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v). \end{cases}$$

Alors $x+y = \sqrt{2}u$, $xy = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, $x < y \iff v > 0$.

Le domaine D devient :

$$\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{2} < u < 2\sqrt{2}, v > 0, 2 < u^2 - v^2 < 8\}.$$

Le Jacobien :

$$\left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right| = 1.$$

De plus $x^2 - y^2 = -2uv$ et $\cos(xy) = \cos\left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right)$.

$$I = \iint_{\Delta} (-2uv) \cos\left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right) du dv.$$

On intègre par rapport à v : posons $w = \frac{u^2 - v^2}{2}$, $dw = -v dv$.

$$I = 2 \iint_{\Delta} u \cdot \frac{dw}{du} \cos w \cdot du = 2 \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} u \left[\sin\left(\frac{u^2 - v^2}{2}\right) \right]_{v=0}^{v=\sqrt{u^2-4}} du.$$

$$I = 2 \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} u \left[\sin\left(\frac{u^2 - (u^2 - 4)}{2}\right) - \sin\left(\frac{u^2}{2}\right) \right] du.$$

$$I = 2 \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} u [\sin 2 - \sin(u^2/2)] du.$$

$$I = 2 \sin 2 \left[\frac{u^2}{2} \right]_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} - 2 \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} u \sin(u^2/2) du.$$

$$I = \sin 2(8 - 2) + 2 [\cos(u^2/2)]_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = 6 \sin 2 + 2(\cos 4 - \cos 1).$$

Exercice 0.13. Calculer le volume du domaine D délimité par la sphère de rayon a et les plans $z = b$ et $z = -b$ avec $0 < b < a$.

Solution :

Le domaine est

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, -b \leq z \leq b\}.$$

En coordonnées cylindriques :

$$D = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{a^2 - z^2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -b \leq z \leq b\}.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz \\
&= \int_{-b}^b \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{a^2 - z^2}} r \, dr \, d\theta \, dz \\
&= \int_{-b}^b \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - z^2}{2} \, d\theta \, dz \\
&= \pi \int_{-b}^b (a^2 - z^2) \, dz \\
&= \pi \left[a^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-b}^b \\
&= \pi \left(2a^2 b - \frac{2b^3}{3} \right) \\
&= \frac{2\pi b}{3} (3a^2 - b^2).
\end{aligned}$$

Exercice 0.14. Calculer $\iint_D xy \, dx \, dy$ où

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Solution :

En coordonnées polaires :

<https://keepmath.com>

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

$$\begin{aligned}
\iint_D xy \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r \cos \theta)(r \sin \theta) \cdot r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr \, d\theta \\
&= \left(\int_0^1 r^3 \, dr \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Exercice 0.15. Calculer l'aire d'un disque de rayon R .

Solution :

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

En coordonnées polaires :

$$D = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

$$\mathcal{A} = \iint_D 1 \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} \, d\theta = \pi R^2.$$

TD N°5 : Intégrales Triples

Exercice 0.16. Calculer $\iiint_A \frac{1}{(1+x+y+z)^2} dx dy dz$ où

$$A = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3 \mid x + y + z \leq 1\}.$$

Solution :

Le domaine d'intégration peut être exprimé comme

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y\}.$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_A \frac{1}{(1+x+y+z)^2} dx dy dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^2} dz dy dx. \end{aligned}$$

On intègre d'abord par rapport à z :

$$\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^2} = \left[-\frac{1}{1+x+y+z} \right]_0^{1-x-y} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{1+x+y}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{1+x+y} - \frac{1}{2} \right) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[\ln(1+x+y) - \frac{y}{2} \right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left(\ln 2 - \frac{1-x}{2} - \ln(1+x) \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \ln(1+x) \right) dx \\ &= \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \int_0^1 \ln(1+x) dx \\ &= \ln 2 - \frac{1}{4} - [(1+x) \ln(1+x) - (1+x)]_0^1 \\ &= \ln 2 - \frac{1}{4} - (2 \ln 2 - 2 - 0 + 1) \\ &= \ln 2 - \frac{1}{4} - 2 \ln 2 + 1 \\ &= \frac{3}{4} - \ln 2. \end{aligned}$$

Exercice 0.17. Calculer le volume d'une boule de rayon R en utilisant les coordonnées sphériques.

Solution :

Soit $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

En coordonnées sphériques :

$$B = \{(r, \theta, \phi) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi\}.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \iiint_B 1 \, dx \, dy \, dz \\
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \, dr \\
&= \left(\int_0^R r^2 \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \right) \\
&= \frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{4\pi R^3}{3}.
\end{aligned}$$

Exercice 0.18. Calculer $\iiint_A z \, dx \, dy \, dz$ où

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}.$$

Solution :

En coordonnées cylindriques :

$$A = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}.$$

$$\begin{aligned}
\iiint_A z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 z \cdot r \, dz \, d\theta \, dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \, d\theta \, dr \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 2\pi r \, dr \\
&= \pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$