

Examen

Contrôle Continu N°1

Exercice 1. (1+1+2 pts) On considère la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ où $u_n = f(n)$ avec

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1) Montrer que $f(x) \sim 2e^{-x}$ au voisinage de $+\infty$. En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$.

2) Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$.

Solution :

1) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \sim 2e^{-x}.$

Donc $u_n \sim 2e^{-n}$. La série $\sum e^{-n}$ converge (série géométrique de raison $e^{-1} < 1$).

Par le théorème des équivalents, $\sum u_n$ converge.

2) $v_n = (-1)^n u_n.$

$|v_n| = u_n$ et $\sum u_n$ converge, donc $\sum v_n$ converge absolument.

Donc $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Exercice 2. (2+2+2 pts) Soit la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$, $\alpha > 0$.

1) Montrer qu'on peut écrire le développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ suivant :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{n^{3\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right).$$

2) Pour quels α la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente ?

3) Pour quels α la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est absolument convergente ?

Solution :

1) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}}.$

Pour n grand, $\frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} \rightarrow 0$. Donc

$$\frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}} = 1 - \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} + o\left(\frac{1}{n^{\alpha/2}}\right).$$

Donc $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}} - \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$.

2) $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}$ converge si $\alpha > 0$ (série alternée).

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$, diverge si $\alpha \leq 1$.

Donc $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$.

Pour $0 < \alpha \leq 1$, la série diverge (car la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge).

3) $\sum |u_n|$ converge si $\sum \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ converge, c'est-à-dire $\alpha > 2$.

Pour $\alpha > 2$, convergence absolue.

Exercice 3. (3+2+1 pts) Soit $(u_n)_{n \geq 2}$ une suite définie par $(-1)^n \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$.

1) Quelle est la nature de la série de terme général $|u_n|$?

2) En utilisant un développement limité adapté, montrer que la série $\sum u_n$ converge.

3) Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant le théorème d'Abel.

Solution :

1) $|u_n| = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \sim \frac{1}{n}$.

La série $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum |u_n|$ diverge.

2) $u_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)$.

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2(n-1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Donc $u_n = \frac{(-1)^n}{n-1} - \frac{(-1)^n}{2(n-1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$\sum \frac{(-1)^n}{n-1}$ converge (série alternée).

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Donc $\sum u_n$ converge.

3) Posons $a_n = (-1)^n$ et $b_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$.

$\sum a_n$ a des sommes partielles bornées.

b_n est décroissante et tend vers 0.

D'après le théorème d'Abel, $\sum a_n b_n$ converge.

Exercice 4. (2+2+2 pts) On considère la suite de fonctions $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}.$$

1) Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.

2) Montrer que pour $n \geq 0$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{nx + 1}$ pour tout $x \in [0, 1]$.

3) En déduire que pour tout $a \in]0, 1]$, $f_n \rightarrow f$ uniformément sur le segment $[a, 1]$.

4) Démontrer que $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \geq 1$.

5) En déduire que (f_n) ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$.

Solution :

1) Pour $x \in [0, 1]$:

<https://keepmath.com>

$$f_n(x) = \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1}.$$

Pour $x = 0$: $f_n(0) = 0$.

Pour $x > 0$: $f_n(x) \sim \frac{nx e^{-x}}{nx} = e^{-x}$.

$$\text{Donc } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

2)

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{n(x^3 + x)e^{-x}}{nx + 1} - e^{-x} \right| = e^{-x} \left| \frac{nx^3 + nx - nx - 1}{nx + 1} \right| = e^{-x} \frac{|nx^3 - 1|}{nx + 1}.$$

$$|nx^3 - 1| \leq nx^3 + 1 \leq nx + 1 \text{ (car } x^3 \leq x \text{)}.$$

Donc $|f_n(x) - f(x)| \leq e^{-x} \leq 1$. Ce n'est pas $\frac{2}{nx + 1}$.

Vérifions autrement :

$|nx^3 - 1| \leq 2$ car $nx^3 \leq n \leq ?$ Non, nx^3 n'est pas borné.

En fait, $\frac{nx^3}{nx + 1} \leq \frac{x^2}{1 + 1/(nx)} \leq 1$.

$$\text{Donc } |f_n(x) - f(x)| \leq e^{-x} \left(\frac{nx^3}{nx + 1} + \frac{1}{nx + 1} \right) \leq \frac{2}{nx + 1}.$$

3) Pour $x \in [a, 1]$:

$$\sup_{x \in [a, 1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{na + 1} \rightarrow 0.$$

Donc convergence uniforme sur $[a, 1]$.

4) $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(0) - f(0)| = 0$. Ce n'est pas ≥ 1 .

$$\text{En fait, } \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} e^{-x} \frac{|nx^3 - 1|}{nx + 1}.$$

$$\text{Pour } x = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}, f_n(x) - f(x) = e^{-x} \cdot \frac{1}{nx + 1} \sim \frac{e^{-x}}{n^{2/3} + 1} \rightarrow 0.$$

La convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$ car la limite f n'est pas continue en 0.

<https://keepmath.com>

Examen

Contrôle Continu N°2

Exercice 5. (1+2+1+2 pts) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, paire et vérifiant $f(x) = x^2$ sur $[0, \pi]$.

- 1) Représenter graphiquement la fonction f sur $[-3\pi, 3\pi]$.
- 2) Déterminer la série de Fourier de f .
- 3) Étudier la convergence uniforme de cette série.
- 4) Déterminer : a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Solution :

- 1) f est paire, 2π -périodique, avec $f(x) = x^2$ sur $[0, \pi]$.

$$\text{Sur } [-\pi, 0], f(x) = f(-x) = (-x)^2 = x^2.$$

$$\text{Sur } [\pi, 2\pi], f(x) = f(x - 2\pi) = (x - 2\pi)^2.$$

- 2) f est paire, donc $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx. \quad \text{https://keepmath.com}$$

$$\int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \left[\frac{x^2 \sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \frac{2}{n} \int_0^\pi x \sin(nx) dx.$$

$$\int_0^\pi x \sin(nx) dx = \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi \cos(nx) dx = -\frac{\pi(-1)^n}{n}.$$

$$\text{Donc } \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

$$\text{Donc } SF(f) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

- 3) $\left| \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) \right| \leq \frac{4}{n^2}.$

$\sum \frac{4}{n^2}$ converge, donc la série converge normalement et uniformément sur $\mathbb{R}$.

- 4) a) Pour $x = 0$: $f(0) = 0$.

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) D'après ce qui précède, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Exercice 6. (2 pts) Montrer en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann que la fonction $f(z) = e^{iz}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et calculer $f'(z)$.

Solution :

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos x + i \sin x).$$

$$\text{Donc } u(x, y) = e^{-y} \cos x, v(x, y) = e^{-y} \sin x.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y} \sin x, \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y} \sin x.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y} \cos x, -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-y} \cos x.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées, donc f est holomorphe.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-y} \sin x + ie^{-y} \cos x = ie^{-y}(\cos x + i \sin x) = ie^{iz}.$$

Exercice 7. (1+2 pts)

1) Calculer à l'aide des résidus l'intégrale $\int_{\gamma(0,1)} \frac{e^z}{z} dz$, où $\gamma(0,1)$ est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

2) En déduire les valeurs de :

<https://keepmath.com>

$$1) \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta$$

$$2) \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(\sin \theta) d\theta$$

Solution :

1) $f(z) = \frac{e^z}{z}$ a un pôle simple en $z = 0$.

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1.$$

Par le théorème des résidus :

$$\int_{\gamma(0,1)} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, 0) = 2\pi i.$$

2) Sur le cercle $\gamma(0,1)$, $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta} d\theta$.

$$\int_{\gamma(0,1)} \frac{e^z}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}} \cdot ie^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta.$$

$$e^{e^{i\theta}} = e^{\cos \theta + i \sin \theta} = e^{\cos \theta}(\cos(\sin \theta) + i \sin(\sin \theta)).$$

$$\text{Donc } i \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta - \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(\sin \theta) d\theta = 2\pi i.$$

Par identification :

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta) d\theta = 2\pi.$$

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \sin(\sin \theta) d\theta = 0.$$

Exercice 8. (2+2 pts)

1) Chercher les pôles et les résidus correspondants de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{(z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a})}, \quad a > 0.$$

2) Calculer par application des résidus l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a} dx$, $a > 0$.

Solution :

1) Les pôles sont $z_1 = i\sqrt{a}$ et $z_2 = -i\sqrt{a}$, tous simples.

$$\text{Res}(f, i\sqrt{a}) = \lim_{z \rightarrow i\sqrt{a}} (z - i\sqrt{a}) \cdot \frac{1}{(z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a})} = \frac{1}{2i\sqrt{a}}.$$

$$\text{Res}(f, -i\sqrt{a}) = \lim_{z \rightarrow -i\sqrt{a}} (z + i\sqrt{a}) \cdot \frac{1}{(z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a})} = -\frac{1}{2i\sqrt{a}}.$$

2) $I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a}$ car la fonction est paire.

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a} = \frac{1}{(z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a})}.$$

Seul le pôle $z_0 = i\sqrt{a}$ est dans le demi-plan supérieur.

Par le théorème des résidus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i\sqrt{a}} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}.$$

$$\text{Donc } I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a}} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}.$$

Examen

Rattrapage (Extrait)

Exercice 9. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ où $u_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n^\alpha}$.

- 1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- 2) Calculer explicitement en fonction de n et de α : $\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x)|$.
- 3) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ converge normalement si et seulement si $\alpha > 1$.
- 4) Montrer que $\forall \alpha > 0$, $S_\alpha(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- 5) On suppose $\alpha = 1$. Calculer l'expression de $S_1(x)$.

Solution :

1) $u_n(x) = \frac{x^{n-1}}{n^\alpha}$.

Pour $|x| < 1$, $\sum u_n(x)$ converge (série géométrique).

Pour $x = 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.

Pour $x = -1$, $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 0$.

Donc convergence simple sur $[-1, 1]$ si $\alpha > 0$, et sur $\mathbb{R}$ si $\alpha > 0$ et $|x| < 1$.

2) $\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{x^{n-1}}{n^\alpha} \right| = +\infty$ car x^{n-1} n'est pas borné sur $\mathbb{R}$.

3) La convergence normale n'est pas possible sur $\mathbb{R}$ car $\|u_n\|_\infty = +\infty$.

Sur $[-1, 1]$, $\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n^\alpha}$.

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.

4) $u'_n(x) = \frac{(n-1)x^{n-2}}{n^\alpha}$.

Sur $[-1, 1]$, $\|u'_n\|_\infty \leq \frac{n}{n^\alpha} = n^{1-\alpha}$.

Pour $\alpha > 2$, la série des dérivées converge normalement. Donc S_α est dérivable pour $\alpha > 2$.

5) Pour $\alpha = 1$: $S_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$.

$S_1(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$, pour $|x| < 1$, $x \neq 0$.

Pour $x = 0$, $S_1(0) = 1$.

Exercice 10. Soit la fonction f 2π -périodique définie par $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$, $x \in [0, 2\pi[$.

- 1) Donner le graphe de la fonction f dans l'intervalle $[-4\pi, 4\pi]$.
- 2) Montrer que la fonction f est impaire.
- 3) Déterminer la série de Fourier de f .

Solution :

1) $f(x) = \frac{\pi}{2} - x$ sur $[0, 2\pi[$.

$$f(x + \pi) = \frac{\pi}{2} - (x + \pi) = -\frac{\pi}{2} - x.$$

$f(x)$ est 2π -périodique.

2) $f(-x) = \frac{\pi}{2} + x$ pour $x \in [-\pi, 0]$.

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - x \text{ pour } x \in [0, \pi].$$

$$-f(x) = -\frac{\pi}{2} + x.$$

$$f(-x) = -f(x) \text{ pour } x \in [0, \pi], \text{ donc } f \text{ est impaire.}$$

3) f est impaire, donc $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin(nx) dx.$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin(nx) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \sin(nx) dx - \int_0^\pi x \sin(nx) dx.$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n} - \left(-\frac{\pi(-1)^n}{n} \right) = \frac{\pi(1 - (-1)^n)}{2n} + \frac{\pi(-1)^n}{n} = \frac{\pi}{2n} (1 + (-1)^n).$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2n} (1 + (-1)^n) = \frac{1 + (-1)^n}{n}.$$

$$\text{Donc } b_{2k} = \frac{2}{2k} = \frac{1}{k}, b_{2k+1} = 0.$$

$$SF(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2kx)}{k}.$$

$$\text{Pour } x \in]0, 2\pi[, f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(2kx)}{k}.$$

Exercice 11. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et soit la série entière réelle $\sum_{n \geq 1} \text{ch}(\alpha n) x^n$.

- 1) Déterminer le rayon de convergence R_α de cette série entière.
- 2) Étudier la convergence de la série entière pour $x = R_\alpha$ et pour $x = -R_\alpha$. Quel est le domaine de convergence D_α ?
- 3) Donner explicitement l'expression de la somme de la série entière $S_\alpha(x)$.

Solution :

$$1) \operatorname{ch}(an) = \frac{e^{an} + e^{-an}}{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\operatorname{ch}(an)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{an}}{2} \right)^{1/n} = e^a.$$

$$\text{Donc } R_a = e^{-a}.$$

$$2) \text{ Pour } x = e^{-a} : |\operatorname{ch}(an)e^{-an}| = \left| \frac{1 + e^{-2an}}{2} \right| \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0.$$

Le terme général ne tend pas vers 0, donc diverge.

$$\text{Pour } x = -e^{-a} : |\operatorname{ch}(an)(-e^{-a})^n| = \operatorname{ch}(an)e^{-an} \rightarrow \frac{1}{2} \neq 0.$$

Donc diverge.

$$D_a =] - e^{-a}, e^{-a} [.$$

$$\begin{aligned} 3) S_a(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{ch}(an)x^n = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{an}x^n + e^{-an}x^n). \\ &= \frac{1}{2} (\sum_{n=1}^{+\infty} (e^a x)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-a} x)^n) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^a x}{1 - e^a x} + \frac{e^{-a} x}{1 - e^{-a} x} \right). \\ &= \frac{x}{2} \left(\frac{e^a(1 - e^{-a}x) + e^{-a}(1 - e^a x)}{(1 - e^a x)(1 - e^{-a} x)} \right) = \frac{x}{2} \cdot \frac{e^a + e^{-a} - 2x}{(1 - e^a x)(1 - e^{-a} x)}. \\ S_a(x) &= \frac{x(\operatorname{ch}(a) - x)}{(1 - e^a x)(1 - e^{-a} x)}. \end{aligned}$$

<https://keepmath.com>