

TD N°1 : Séries Numériques

Exercice 0.1. Étudier la nature des séries de terme général u_n :

*) $u_n = \frac{1}{n2^n}$

*) $u_n = \frac{\ln n}{n}$

*) $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$

*) $u_n = e^{-n^2}$

*) $u_n = \frac{1}{n!}$

*) $u_n = \frac{n}{3^n}$

*) $u_n = \frac{n!}{n^n}$

*) $u_n = \tan\left(\frac{1}{2^n}\right)$

Solution :

*) $u_n = \frac{1}{n2^n}$.

<https://keepmath.com>

Règle de d'Alembert : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{2(n+1)} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$.

Donc la série converge.

*) $u_n = \frac{\ln n}{n}$.

Comparaison avec une intégrale : $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2} \right]_2^{+\infty} = +\infty$.

Donc la série diverge.

*) $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$.

$\frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ pour n assez grand. Série de Riemann $\alpha = 3/2 > 1$ converge.

Donc la série converge.

*) $u_n = e^{-n^2}$.

$e^{-n^2} \leq e^{-n}$ pour $n \geq 1$. Série géométrique de raison $e^{-1} < 1$ converge.

Donc la série converge.

*) $u_n = \frac{1}{n!}$.

Règle de d'Alembert : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 < 1$.

Donc la série converge.

$$*) \ u_n = \frac{n}{3^n}.$$

$$\text{R\`egle de d'Alembert : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{3n} \rightarrow \frac{1}{3} < 1.$$

Donc la s\'erie converge.

$$*) \ u_n = \frac{n!}{n^n}.$$

$$\text{R\`egle de d'Alembert : } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \rightarrow e^{-1} < 1.$$

Donc la s\'erie converge.

$$*) \ u_n = \tan\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

$$\tan\left(\frac{1}{2^n}\right) \sim \frac{1}{2^n}. \text{ S\'erie g\'eom\'etrique de raison } 1/2 < 1 \text{ converge.}$$

Donc la s\'erie converge.

Exercice 0.2. *D\'eterminer la nature de la s\'erie de terme g\'en\'eral :*

$$*) \ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}$$

$$*) \ u_n = (-1)^n \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$$

<https://keepmath.com>

Solution :

$$*) \ u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}.$$

La s\'erie $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (s\'erie altern\'ee).

La s\'erie $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Donc $\sum u_n$ diverge (somme d'une convergente et d'une divergente).

$$*) \ u_n = (-1)^n \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right).$$

$$\text{On a } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1).$$

$$\text{Donc } \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) \sim \frac{e^{-\gamma}}{n}.$$

La s\'erie $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge (s\'erie altern\'ee).

Donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 0.3. *D\'eterminer la somme des s\'eries de terme g\'en\'eral :*

$$*) \ u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \ n \geq 1$$

$$*) \ u_n = \frac{1}{n^2 - 1}, \ n \geq 2$$

$$*) \ u_n = \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)}, \ n \geq 1$$

$$*) \ u_n = \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)$$

Solution :

$$*) \ \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

$$*) \ \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right).$$

$$S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4}.$$

<https://keepmath.com>

$$*) \ \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3/2}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}.$$

$$\text{Après télescopage, la somme est } \frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$

$$*) \ \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right) = 2 \ln(n+1) - \ln n - \ln(n+2).$$

$$S_n = \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right).$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ln \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right) = \ln 1 = 0.$$

Donc la somme est 0.

TD N°2 : Séries Entières

Exercice 0.4. Déterminer le développement en série entière autour de 0 des fonctions suivantes :

$$*) \ \frac{1}{1-x}$$

$$*) \ \arctan x$$

$$*) \ln(1+x)$$

$$*) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

$$*) \frac{1}{1+x+x^2}$$

$$*) \ln(1+x+x^2)$$

$$*) \frac{1}{3+x}$$

$$*) \operatorname{ch}(x)$$

$$*) \cos^2(x)$$

Solution :

$$*) \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, |x| < 1.$$

$$*) \arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| < 1.$$

$$*) \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, |x| < 1.$$

$$*) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, |x| < 1.$$

$$*) \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (x^{3n} - x^{3n+1}), |x| < 1.$$

$$*) \ln(1+x+x^2) = \ln \left(\frac{1-x^3}{1-x} \right) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n - x^{3n}}{n}, |x| < 1.$$

$$*) \frac{1}{3+x} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x/3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n, |x| < 3.$$

$$*) \operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}.$$

$$*) \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 0.5. Déterminer la valeur des sommes :

$$*) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

$$*) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \cdot 3^n}$$

Solution :

On sait que $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$.

$$*) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2.$$

$$*) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$$

Exercice 0.6. On considère la série entière définie par :

$$S(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{4k+1}}{4k+1} + \sum_{k \geq 0} \frac{x^{4k+2}}{4k+2}.$$

*) Déterminer le rayon de convergence de S .

*) Montrer que $S'(x) = \frac{1+x}{1-x^4}$.

*) Grâce à la décomposition en éléments simples de $S'(x)$, déduire l'expression de $S(x)$.

Solution :

<https://keepmath.com>

*) Rayon de convergence :

$$S(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{x^{4k+1}}{4k+1} + \sum_{k \geq 0} \frac{x^{4k+2}}{4k+2}.$$

Les deux séries ont un rayon de convergence $R = 1$.

Pour $x = 1$, la série diverge (série harmonique).

Donc $R = 1$.

$$*) S'(x) = \sum_{k \geq 0} x^{4k} + \sum_{k \geq 0} x^{4k+1} = \sum_{k \geq 0} (x^4)^k + x \sum_{k \geq 0} (x^4)^k = \frac{1}{1-x^4} + \frac{x}{1-x^4} = \frac{1+x}{1-x^4}.$$

$$*) \frac{1+x}{1-x^4} = \frac{1+x}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{1}{(1-x)(1+x^2)}.$$

$$\text{Décomposition : } \frac{1}{(1-x)(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}.$$

$$1 = A(1+x^2) + (Bx+C)(1-x).$$

$$\text{Pour } x = 1 : 1 = 2A \implies A = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Pour } x = 0 : 1 = A + C \implies C = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Pour } x = i : 1 = (Bi+C)(1-i) = \left(Bi + \frac{1}{2}\right)(1-i).$$

$$1 = \frac{1}{2} + B + i\left(B - \frac{1}{2}\right) \implies \begin{cases} B + \frac{1}{2} = 1 \\ B - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \implies B = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Donc } S'(x) = \frac{1/2}{1-x} + \frac{x/2 + 1/2}{1+x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{x+1}{1+x^2} \right).$$

$$S(x) = \frac{1}{2} \left(-\ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \arctan x \right).$$

TD N°3 : Suites de Fonctions

Exercice 0.7. Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}.$$

- *) Étudier la convergence simple de (f_n) .
- *) Étudier la convergence uniforme sur $[0, 1]$.
- *) Étudier la convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$.

Solution :

- *) Convergence simple :

Pour $x = 0$: $f_n(0) = 0$.

Pour $x > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+nx} = 1$.

$$\text{Donc } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

<https://keepmath.com>

- *) Convergence uniforme sur $[0, 1]$:

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \frac{nx}{1+nx} & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{1+nx} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$ (atteint en $x = 0$).

Donc pas de convergence uniforme sur $[0, 1]$.

- *) Convergence uniforme sur $[a, 1]$ avec $a > 0$:

$$\sup_{x \in [a, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [a, 1]} \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na} \rightarrow 0.$$

Donc convergence uniforme sur $[a, 1]$.

Exercice 0.8. Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \arctan(nx)$.

Étudier successivement la convergence de cette suite sur $[0, 1]$, $]0, 1]$ et $[a, 1]$ avec $a \in]0, 1[$.

Solution :

*) Convergence simple :

Pour $x = 0$: $f_n(0) = 0$.

Pour $x > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(nx) = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Donc } f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

*) Sur $[0, 1]$: Pas de convergence uniforme car f n'est pas continue en 0.

*) Sur $]0, 1]$: $\sup_{x \in]0, 1]} |f_n(x) - \frac{\pi}{2}| = \sup_{x \in]0, 1]} \left| \arctan(nx) - \frac{\pi}{2} \right|$.

$$= \sup_{x \in]0, 1]} \arctan\left(\frac{1}{nx}\right).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan\left(\frac{1}{nx}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Donc } \sup_{x \in]0, 1]} |f_n(x) - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2}.$$

Pas de convergence uniforme.

*) Sur $[a, 1]$ avec $a > 0$:

$$\sup_{x \in [a, 1]} |f_n(x) - \frac{\pi}{2}| = \arctan\left(\frac{1}{na}\right) \rightarrow 0.$$

Donc convergence uniforme sur $[a, 1]$.

<https://keepmath.com>

Exercice 0.9. Soit (f_n) la suite de fonctions définies par $f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$.

*) Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $I = [0, 1]$.

*) En étudiant les variations de f_n , trouver des sous-intervalles de I où la convergence est uniforme.

Solution :

*) Pour $x \in [0, 1]$:

$$f_n(x) = 4^n x^{2^n} (1 - x^{2^n}).$$

Si $x = 0$ ou $x = 1$: $f_n(x) = 0$.

Si $0 < x < 1$: $0 \leq x^{2^n} \leq 1$ et $x^{2^n} \rightarrow 0$.

$$f_n(x) = (4x)^{2^n} \cdot (1 - x^{2^n}) \cdot \frac{4^n}{(4x)^{2^n}} \rightarrow 0 \text{ car } 4x < 4.$$

Donc $f_n \rightarrow 0$ simplement sur $[0, 1]$.

*) Étude des variations :

$$f'_n(x) = 4^n \cdot 2^n x^{2^n-1} (1 - x^{2^n}) - 4^n x^{2^n} \cdot 2^n x^{2^n-1} = 4^n \cdot 2^n x^{2^n-1} (1 - 2x^{2^n}).$$

$$f'_n(x) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x^{2^n} = \frac{1}{2} \iff x = 2^{-1/2^n}.$$

Le maximum est atteint en $x_n = 2^{-1/2^n}$.

$$f_n(x_n) = 4^n \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4^n \cdot \frac{1}{4} = 4^{n-1}.$$

La convergence n'est pas uniforme sur $[0, 1]$ car $\sup |f_n(x)| = 4^{n-1} \rightarrow +\infty$.

Sur $[a, 1]$ avec $a > 0$, la convergence est uniforme car $f_n \rightarrow 0$ uniformément sur $[a, 1]$ (à vérifier par domination).

TD N°4 : Séries de Fourier

Exercice 0.10. Soit f la fonction 2π -périodique paire définie par :

$$f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}, \quad \text{si } x \in [0, \pi].$$

- *) Représenter le graphe de f .
- *) Calculer ses coefficients de Fourier.
- *) Donner le développement en série de Fourier de f .
- *) Déterminer la valeur de $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Solution :

*) f est paire et 2π -périodique. Sur $[0, \pi]$, $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$.

*) Coefficients de Fourier :

f est paire, donc $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) dx = \frac{2}{\pi} \left[x - \frac{x^2}{\pi}\right]_0^\pi = \frac{2}{\pi}(\pi - \pi) = 0.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \cos(nx) dx.$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi x \cos(nx) dx.$$

$$\int_0^\pi x \cos(nx) dx = \left[\frac{x \sin(nx)}{n} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n} dx = -\frac{1}{n} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^\pi = \frac{1 - (-1)^n}{n^2}.$$

$$a_n = -\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1 - (-1)^n}{n^2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{8}{\pi^2 n^2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}.$$

*) Développement :

$$f(x) = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

*) Pour $x = 0$: $f(0) = 1 = -\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

$$\text{Donc } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 0.11. Soit f la fonction 2π -périodique impaire définie par :

$$f(x) = x(\pi - x), \quad \text{si } x \in [0, \pi].$$

- *) Représenter le graphe de f .
- *) Calculer ses coefficients de Fourier.
- *) Donner le développement en série de Fourier de f .
- *) Déterminer la valeur de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Solution :

*) f est impaire et 2π -périodique. Sur $[0, \pi]$, $f(x) = x(\pi - x)$.

*) f est impaire, donc $a_n = 0$.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin(nx) dx.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\pi \int_0^\pi x \sin(nx) dx - \int_0^\pi x^2 \sin(nx) dx \right].$$

$$\int_0^\pi x \sin(nx) dx = \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos(nx)}{n} dx = -\frac{\pi(-1)^n}{n}.$$

$$\int_0^\pi x^2 \sin(nx) dx = \left[-\frac{x^2 \cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{2}{n} \int_0^\pi x \cos(nx) dx = -\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n^2}.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{\pi^2(-1)^n}{n} - \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3} \right] = \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n^3}.$$

$$\text{Donc } b_{2k+1} = \frac{8}{\pi(2k+1)^3}.$$

$$*) f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}.$$

*) Pour $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

$$\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^k.$$

$$\text{Donc } \frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

TD N°5 : Analyse Complexe

Exercice 0.12. Déterminer si les fonctions suivantes sont holomorphes sur $\mathbb{C}$.

- *) $F(x + iy) = x + 2iy$
- *) $F(x + iy) = \sin(x) \operatorname{ch}(y) + i \cos(x) \operatorname{sh}(y)$
- *) $F(x + iy) = x^2 + 2x - 1 - y^2 + i(2xy + 2y)$
- *) $F(x + iy) = \sin^2(x + y) + i \cos^2(x + y)$
- *) $F(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

Solution :

Pour qu'une fonction $F = u + iv$ soit holomorphe, il faut et il suffit que u et v vérifient les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- *) $u = x, v = 2y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2. \text{ Pas holomorphe.}$$

- *) $u = \sin x \operatorname{ch} y, v = \cos x \operatorname{sh} y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \cos x \operatorname{ch} y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \operatorname{sh} y, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -(-\sin x \operatorname{sh} y) = \sin x \operatorname{sh} y.$$

CR vérifiées. Holomorphe.

- *) $u = x^2 + 2x - 1 - y^2, v = 2xy + 2y$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y.$$

CR vérifiées. Holomorphe. $F(z) = z^2 + 2z - 1$.

- *) $u = \sin^2(x + y), v = \cos^2(x + y)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 \sin(x + y) \cos(x + y) = \sin(2x + 2y).$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2 \cos(x + y) \sin(x + y) = -\sin(2x + 2y).$$

CR non vérifiées. Pas holomorphe.

- *) $u = x^3 - 3xy^2, v = 3x^2y - y^3$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -6xy.$$

CR vérifiées. Holomorphe. $F(z) = z^3$.

Exercice 0.13. Déterminer l'ensemble des fonctions F holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle P est :

*) $P(x + iy) = 2xy$

*) $P(x + iy) = e^x \cos y$

*) $P(x + iy) = (x - y)^2$

*) $P(x + iy) = x^2 + y^2$

Solution :

Pour trouver la partie imaginaire Q à partir de P , on utilise les conditions de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}.$$

*) $P = 2xy$.

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2x \implies Q = 2xy + \varphi(x).$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + \varphi'(x) = -2y \implies \varphi'(x) = -4y \text{ (impossible car } \varphi \text{ ne dépend que de } x \text{)}.$$

Donc P n'est pas harmonique. Pas de fonction holomorphe.

*) $P = e^x \cos y$.

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = e^x \cos y \implies Q = e^x \sin y + \varphi(x).$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \sin y + \varphi'(x) = e^x \sin y \implies \varphi'(x) = 0 \implies \varphi(x) = C.$$

$$\text{Donc } F(z) = e^x \cos y + i(e^x \sin y + C) = e^z + iC.$$

*) $P = (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2x - 2y \implies Q = 2xy - y^2 + \varphi(x).$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + \varphi'(x) = -(-2x + 2y) = 2x - 2y \implies \varphi'(x) = 2x - 4y \text{ (impossible)}.$$

Donc pas de fonction holomorphe.

*) $P = x^2 + y^2$.

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = 2x \implies Q = 2xy + \varphi(x).$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y + \varphi'(x) = -2y \implies \varphi'(x) = -4y \text{ (impossible)}.$$

Donc pas de fonction holomorphe.

Exercice 0.14. Montrer en utilisant les conditions de Cauchy-Riemann que la fonction $f(z) = e^{iz}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et calculer $f'(z)$.

Solution :

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix} = e^{-y}(\cos x + i \sin x).$$

$$\text{Donc } u(x, y) = e^{-y} \cos x, v(x, y) = e^{-y} \sin x.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y} \sin x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^{-y} \sin x.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y} \cos x, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-y} \cos x.$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont vérifiées, donc f est holomorphe.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -e^{-y} \sin x + ie^{-y} \cos x = ie^{-y}(\cos x + i \sin x) = ie^{iz}.$$

TD N°6 : Intégrales et Résidus

Exercice 0.15. Calculer à l'aide des résidus l'intégrale :

$$\int_{\gamma(0,1)} \frac{e^z}{z} dz,$$

où $\gamma(0,1)$ est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Solution :

La fonction $f(z) = \frac{e^z}{z}$ a un pôle simple en $z = 0$.

$$\text{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{e^z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} e^z = 1.$$

Par le théorème des résidus :

$$\int_{\gamma(0,1)} \frac{e^z}{z} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, 0) = 2\pi i.$$

Exercice 0.16. Chercher les pôles et les résidus correspondants de la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{(z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a})}, \quad a > 0.$$

Solution :

Les pôles sont $z_1 = i\sqrt{a}$ et $z_2 = -i\sqrt{a}$, tous simples.

$$\text{Res}(f, i\sqrt{a}) = \lim_{z \rightarrow i\sqrt{a}} (z - i\sqrt{a}) \cdot \frac{1}{(z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a})} = \frac{1}{2i\sqrt{a}}.$$

$$\text{Res}(f, -i\sqrt{a}) = \lim_{z \rightarrow -i\sqrt{a}} (z + i\sqrt{a}) \cdot \frac{1}{(z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a})} = -\frac{1}{2i\sqrt{a}}.$$

Exercice 0.17. Calculer par application des résidus l'intégrale :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a} dx, \quad a > 0.$$

Solution :

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} \text{ car la fonction est paire.}$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a} = \frac{1}{(z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a})}.$$

Seul le pôle $z_0 = i\sqrt{a}$ est dans le demi-plan supérieur.

$$\text{Res}(f, i\sqrt{a}) = \frac{1}{2i\sqrt{a}}.$$

Par le théorème des résidus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i\sqrt{a}} = \frac{\pi}{\sqrt{a}}.$$

$$\text{Donc } I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{a}} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}.$$

Exercice 0.18. Calculer les intégrales suivantes :

$$*) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$*) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

$$*) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

Solution :

$$*) f(z) = \frac{1}{1+z^2}. \text{ Pôles : } z = \pm i.$$

$$\text{Res}(f, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \cdot \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

$$*) f(z) = \frac{1}{1+z^4}. \text{ Pôles : } z_k = e^{i(2k+1)\pi/4}, k = 0, 1, 2, 3.$$

Dans le demi-plan supérieur : $z_0 = e^{i\pi/4}, z_1 = e^{i3\pi/4}$.

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{z_0}{4z_0^4} = -\frac{z_0}{4}.$$

$$\text{Res}(f, z_1) = \frac{1}{4z_1^3} = -\frac{z_1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} &= 2\pi i \left(-\frac{z_0 + z_1}{4} \right) = -\frac{\pi i}{2} (e^{i\pi/4} + e^{i3\pi/4}) = -\frac{\pi i}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= -\frac{\pi i}{2} (i\sqrt{2}) = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$*) f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}. \text{ Pôle double en } z = i.$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left((z-i)^2 \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{(z+i)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \\ &= \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{-2}{-8i} = \frac{1}{4i}. \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{4i} = \frac{\pi}{2}.$$